

T は真, F は偽, Z は整数の集合, R は実数の集合とする. P(X) は集合 X のべき集合を表すものとする.

1 真理値表に, T または F を正しく記入しなさい. なお, 空欄は計算の為に用いて良い.

(1)

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \oplus Q$
F	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	F

(2)

P	Q	R	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(P \wedge Q)$
F	F	F	T	F
F	F	T	T	F
F	T	F	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	T	F
T	F	T	T	F
T	T	F	F	T
T	T	T	T	T

(3)

P	Q	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$	$(P \rightarrow Q)$	$(P \wedge Q)$
F	F	F	T	F
F	T	F	T	F
T	F	T	F	F
T	T	T	T	T

2 同値変形により, 連言標準形および選言標準形を示しなさい. 変形の途中で「...連言標準形」や「...選言標準形」と書きなさい.

(1) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee R \\ &\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee R \quad \dots\text{選言標準形} \\ &\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \quad \dots\text{連言標準形} \end{aligned}$$

(2) $(P \wedge Q) \vee \neg(P \leftrightarrow Q)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg\{(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg\{(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \{(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))\} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \{(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)\} \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \quad \dots\text{選言標準形(冗長だが)} \\ &\Leftrightarrow \{(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)\} \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow \{(P \wedge Q) \vee P\} \wedge \{(P \wedge Q) \vee \neg Q\} \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow \{P \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q))\} \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow \{P \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge \mathbf{T})\} \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow \{P \wedge (P \vee \neg Q)\} \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg P) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \\ &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge \mathbf{T} \\ &\Leftrightarrow P \vee Q \quad \dots\text{選言標準形, 連言標準形} \end{aligned}$$

3 述語論理式の真偽を答えなさい. なお, 命題関数 $L(x, y) =$ “x は y よりも小さい”, $x, y, z \in Z$ とする.

(1) $\forall x \forall y L(x, y)$

偽

(2) $\forall x \exists y L(x, y)$

真

(3) $\exists x \forall y L(x, y)$

偽

(4) $\exists x \exists y L(x, y)$

真

(5) $\forall x \forall y \forall z \{L(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow L(x, z)\}$

真

4 同値変形により, 冠頭標準形にしなさい.

(1) $\exists x \{P(x) \rightarrow Q(x)\}$

$$\Leftrightarrow \exists x \{\neg P(x) \vee Q(x)\}$$

(2) $\forall x \{\exists y P(x, y) \rightarrow \forall y Q(x, y)\}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x \{\neg \exists y P(x, y) \vee \forall y Q(x, y)\} \\ &\Leftrightarrow \forall x \{\forall y \neg P(x, y) \vee \forall y Q(x, y)\} \\ &\Leftrightarrow \forall x \{\forall y \neg P(x, y) \vee \forall z Q(x, z)\} \\ &\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \{\neg P(x, y) \vee Q(x, z)\} \end{aligned}$$

5 集合を計算しなさい.

5.1 $A = \{n \in R \mid |n| < 10\}$, $B = \{2n \mid n \in Z\}$ とする.

(1) $A \cap B = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

(2) $\{A - (Z - B)\} \cap Z = \{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

5.2 $A = \{n \in Z \mid 0 < n < 5, n \text{ は素数でない}\}$

(3) $A = \{1, 4\}$

(4) $A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 4), (1, 4, 1), (1, 4, 4), (4, 1, 1), (4, 1, 4), (4, 4, 1), (4, 4, 4)\}$

5.3 $A = \{T, F\}$

(5) $P(A) = \{\{T, F\}, \{T\}, \{F\}, \{\}\}$

(6) $|P(A)| = 4$