離散数学 ⑬

徳久雅人

グラフ理論
(行列による表現と計算)

資料: http://unicorn.ike.tottori-u.ac.jp/tokuhisa/
https://sslvpn.tottori-u.ac.jp/
メール: tokuhisa@ike.tottori-u.ac.jp

2012.7/9

離散数学の教育目標

- 記号論理 — 条件を書く / 推論する
- 集合論 — データを書く，計算する
- グラフ理論 — データの構造を書く，計算する

(シラバス) 15週の計画

- 1〜4週: 記号論理
- 5〜9週: 集合論
- 10〜14週: グラフ理論
- 15週: 補足

今日のゴール

- 前回の続き
  連結性
- 行列による表現と計算
  接続行列，隣接行列，ウォークの総数，最短パス

行列による表現

- 接続行列 (Incidence Matrix)
  – 頂点に対する辺
- 隣接行列 (Adjacency Matrix)
  – 頂点と頂点

接続行列

r_{ij} : i 行 j 列目の要素

- 無向グラフのとき

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v_i \text{ が辺 } j \text{ の端点のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

- 有向グラフのとき

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v_i \text{ が辺 } j \text{ の始点のとき}) \\ -1 & (\text{頂点 } v_i \text{ が辺 } j \text{ の終点のとき}) \\ 0 & (\text{どちらでもないとき}) \end{cases}$$

隣接行列

s_{ij}：i 行 j 列目の要素

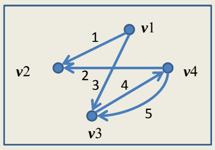
- 無向グラフのとき

$$s_{ij}=\begin{cases}1 & （2つの頂点\ v_i\ と\ v_j の間に辺が存在） \\ 0 & （そうでないとき）\end{cases}$$

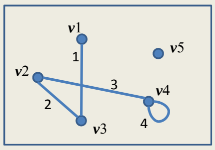
- 有向グラフのとき

$$s_{ij}=\begin{cases}1 & （頂点\ v_i\ から\ v_j\ に向けて辺が存在） \\ 0 & （そうでないとき）\end{cases}$$

例題1



G_1



G_2

- グラフG_1, G_2の接続行列 I_{G1}, I_{G2} と隣接行列 A_{G1}, A_{G2} をそれぞれ記述せよ

答え

$$I_{G1}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{array} \\ \begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$I_{G2}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array} \\ \begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\\v5\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A_{G1}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}v1 & v2 & v3 & v4\end{array} \\ \begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A_{G1}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}v1 & v2 & v3 & v4 & v5\end{array} \\ \begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\\v5\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

ウォークの総数

- 隣接行列を t 乗
- i 行 j 列目の要素 s_{ij} は，頂点 v_i から頂点v_j への長さ t のウォークの総数

例題1の計算例

$$A_{G1}^{2}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}v1 & v2 & v3 & v4\end{array} \\ \begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$A_{G1}^{3}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}v1 & v2 & v3 & v4\end{array} \\ \begin{array}{c}v1\\v2\\v3\\v4\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

最短距離を求める

- 閉路を含まない単純な有向グラフ$G=(V,E)$において，頂点 s から頂点 t への最短パスの距離を求める.

```
shortest-path( G, s, t )
  n = | V(G) |
  M = [0..n-1, V]
  M[0, t] = 0
  for v ∈ V(G), v ≠ t
    M[0,v] = ∞
  for i = 1, 2, …, n – 1
    for v ∈ V(G)
      M[ i, v] = min( M[ i-1, v],
                      min( M[i-1, w] + length(v,w))
                      w ∈ V(G)
                    )
  return M[n-1, s]
end
```