離散数学 ⑫

徳久雅人

グラフ理論
（頂点や辺の並び）

http://unicorn.ike.tottori-u.ac.jp/tokuhisa/
https://sslvpn.tottori-u.ac.jp/

2012.7/2

離散数学の教育目標

- 記号論理　条件を書く／推論する
- 集合論　データを書く，計算する
- グラフ理論　データの構造を書く，計算する

（シラバス）15週の計画

- 1〜4週：　記号論理
- 5〜9週：　集合論
- 10〜14週：グラフ理論
- 15週：　補足

今日のゴール

- 前回の続き
  グラフの和・積，無向基礎グラフ
- 頂点や辺の並び
  系列，ウォーク，閉じている/開いている，トレイル，パス，閉路，閉道，オイラー路，ハミルトン路，長さ，距離，連結性

12.1 頂点や辺の並び

12.1 節では，以下の変数を使って説明

- グラフ $G = (V, C, E)$

$v_i, v_j \in V$　頂点

$e_k \in C$　標識

$E \subseteq V \times V \times C$　辺集合

ウォーク (walk)

- 隣接する頂点とその間の辺の系列 W

$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$

ただし，$(v_{i-1}, v_i, e_i) \in E(G)$　$(i = 1..k)$

v_0 は W の始点，v_kは W の終点.

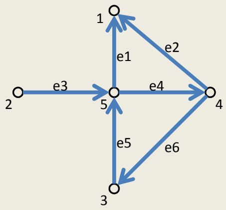
$v_0 = v_k$ のとき W は閉じているという

$v_0 \neq v_k$ のとき W は開いているという

トレイル（路，trail）

- 辺 $e_1, e_2, \ldots, e_k$ が全て異なるW

$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$



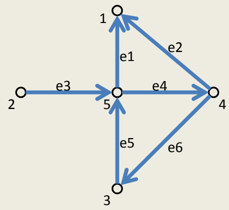
トレイルの例
$W_1 = (2, e_3, 5, e_4, 4, e_6, 3, e_5, 5, e_1, 1)$

トレイルではない例（負例）
$W_2 = (2, e_3, 5, e_4, 4, e_6, 3, e_5, 5, e_4, 4)$

パス（道，path）

- 辺 $e_1, e_2, \ldots, e_k$, 頂点 $v_0, v_1, \ldots, v_k$ が全て異なるW

$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$

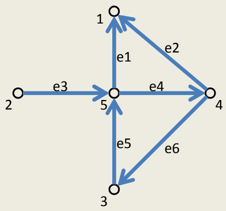


パスの例
$W_1 = (2, e_3, 5, e_4, 4, e_6, 3)$

パスではない例（負例）
$W_2 = (2, e_3, 5, e_4, 4, e_6, 3, e_5, 5)$

閉路(closed trail)

- 始点と終点が同じトレイル



閉路の例
$W_1 = (5, e_4, 4, e_6, 3, e_5, 5)$

閉道 (closed path)

- 始点と終点が同じ，かつ，
- 終点を除き，全ての辺と頂点が異なるウォーク

オイラーグラフ

- オイラー路：
  - 全ての辺を1回ずつ通過するトレイル
- オイラー閉路：
  - 全ての辺を1回ずつ通過する閉路

ハミルトングラフ

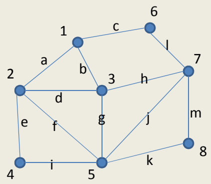
- ハミルトン路：
  - 全ての頂点を1回ずつ通過するパス
- ハミルトン閉路：
  - 始点と終点が一致し，その他の全ての頂点を1回ずつ通過するパス

ウォークのまとめ

用語	意味
ウォーク	頂点と辺の系列 $W=(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k)$
トレイル（路）	異なる辺を通るウォーク
パス（道）	異なる辺と頂点を通るウォーク．*単純パス*
閉じたウォーク	始点と終点が一致
オイラー路	全辺を1回ずつ通過するウォーク （同じ頂点を2回以上通過できる）
ハミルトン路	全頂点を1回ずつ通過するウォーク （通過しない辺があっても良い）
ウォークの長さ	ウォークの辺の数

※ 文献によって，用語と意味にずれがある．教科書では，ウォーク･トレイル･パスの区別がなく，いずれも道（パス）と呼んでいる．

例題1



(1) 頂点1から頂点8へのウォークを1つ示せ．

(2) オイラー路が存在すればそれを示せ．

(3) ハミルトン閉路が存在すればそれを示せ．

答え

(1) $(1, b, 3, g, 5, k, 8)$ など

(2) $(1, a, 2, d, 3, b, 1, c, 6, l, 7, h, 3, g, 5, f, 2, e, 4, i, 5, j, 7, m, 8, k, 5)$ など

(3) $(1, b, 3, d, 2, e, 4, i, 5, k, 8, m, 7, l, 6, c, 1)$ など

長さと距離

- 長さ：ウォークを測る．Wの辺の延べ数
- 距離：2つの頂点間のパスの長さの最小値
  - 2頂点が同じならば距離は0
  - 2頂点間にパスが無いならば距離は∞

連結性

- 無向グラフ
  - 連結：全ての頂点間にパスが存在
- 有向グラフ
  - 連結：無向基礎グラフが連結
  - 強連結：有向辺の向きに沿ったパスが，全ての頂点間に存在

連結性の例