離散数学 ⑪

徳久雅人

グラフ理論
（用語・いろいろなグラフ）

http://unicorn.ike.tottori-u.ac.jp/tokuhisa/
https://sslvpn.tottori-u.ac.jp/

2012.6/25

離散数学の教育目標

- 記号論理　条件を書く／推論する
- 集合論　データを書く，計算する
- グラフ理論　データの構造を書く，計算する

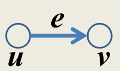
(シラバス) 15週の計画

- 1～4週：　記号論理
- 5～9週：　集合論
- 10～14週：グラフ理論
- 15週：　補足

今日のゴール

- グラフの用語
  隣接，入る，出る，輪，並列，次数，孤立点
- いろいろなグラフ
  単純～，多重～，完全～，部分～，真部分～，制限～，2部～，完全2部～，和，積，無向基礎～

11.1 グラフの用語

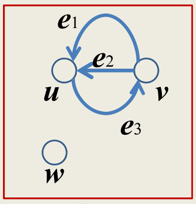


$e = (u, v)$

u と v は e に隣接する
e は u から出る
e は v に入る

e は輪である
$e = (u, u)$

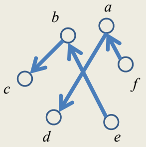
無向辺の輪
$e = \{u\}$



グラフG

e_1とe_2は並列辺である
e_1とe_3は並列辺ではない
u の出次数 $deg_G^+(u) = 1$
u の入次数 $deg_G^-(u) = 2$
u の次数 $deg_G(u)$
$= deg_G^+(u) + deg_G^-(u) = 3$
w の次数 $deg_G(w) = 0$
w は孤立点

例題1



左のグラフGについて答えよ.

(1) $V(G) =$

(2) $|E(G)| =$

(3) $\mathbf{deg}_G^{+}(a) =$

(4) $\mathbf{deg}_G(a) =$

(5) $\sum_{v\in\{b,c,d\}} \mathbf{deg}_G(v) =$

(6) $\sum_{v\in V(G)} \mathbf{deg}_G(v) =$

答え

(1) $\{ a, b, c, d, e, f \}$

(2) 4

(3) 1

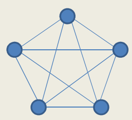
(4) 2

(5) $\mathbf{deg}_G(b)+\mathbf{deg}_G(c)+\mathbf{deg}_G(d) = 2+1+1 = 4$

(6) 8

11.2 いろいろなグラフ

- 単純グラフ: 輪と並列辺が無い
- 多重グラフ: 輪や並列辺がある
- 完全グラフ: 全ての2頂点間に辺が存在する単純無向グラフ



完全グラフ K_5

- 部分グラフ: $G_1 \subseteq G_2$

$$(V(G_1) \subseteq V(G_2)) \wedge (E(G_1) \subseteq E(G_2))$$

頂点は部分集合　　辺も部分集合

- 真部分グラフ: $G_1 \subset G_2$

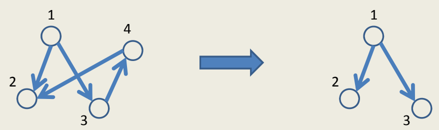
$$(V(G_1) \subset V(G_2)) \wedge (E(G_1) \subseteq E(G_2))$$

頂点は真部分集合　　辺は部分集合

$$\vee\ (V(G_1) = V(G_2)) \wedge (E(G_1) \subset E(G_2))$$

頂点は同じ集合　　辺が真部分集合

- 制限グラフ: $G \mid V'$
  $V(G)$からV'だけを残したグラフ

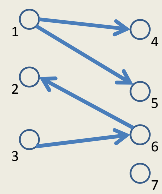


グラフ G と
$V' = \{ 1, 2, 3 \}$

制限グラフ $G \mid V'$

$V(G \mid V') = V'$
$E(G \mid V') = E(G) \cap V' \times V'$

- 2部グラフ: $G = (V_1, V_2, E)$

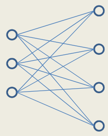


$V_1 = \{1, 2, 3\}$　　$V_2 = \{4, 5, 6, 7\}$

$E \subseteq (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)$

$V_1 \cap V_2 = \{\ \}, V_1 \cup V_2 = V(G)$

- 完全2部グラフ：$K_{n1,n2}$
  - 2部グラフ (V_1, V_2, E) であり
    V_1とV_2の全ての間に辺がある
    $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2$

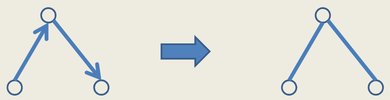


$K_{3,4}$

$G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ とする

- グラフの和
  $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
- グラフの積
  $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$

- 無向基礎グラフ
  - 有向グラフGの全ての辺について，有向辺を無向辺に置き換えて得られる無向グラフ

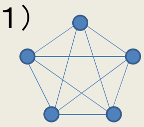


グラフG　　グラフG の無向基礎グラフ

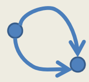
例題2

グラフの種類名を答えよ.

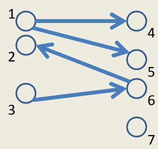
（1）



（2）



（3）



答え

(1) 完全グラフ K_5

(2) 多重グラフ

(3) 2部グラフ

※ ほかにも答えはある. (1) は単純グラフ, 無向グラフ.
(2) は有向グラフ, 2部グラフ (3)は単純グラフ, 有向グラフ.