

離散数学 ⑦

徳久雅人

集合論
(関係)

2012.5/28

離散数学の教育目標

- 記号論理 } 条件を書く
推論する
- 集合論 データを書く, 計算する
- グラフ理論 データの構造を書く, 計算する

(シラバス) 15週の計画

- 1~4週: 記号論理
- 5~9週: 集合論
- 10~14週: グラフ理論
- 15週: 補足

レポート課題

- 先週の小テストの誤りを修正せよ(6月4日(月)授業開始時に提出)
- 補講:
 - 5月31日(木)3限目
 - 共通教育棟 D31 室
 - **自由参加**. レポート課題を一緒にやりました。

出来がまいちだったので、これからは、バツポの依存度を下げて授業をすすめます。

今日のゴール

- 関係とは
- 集合による関係の記述
- 2項関係
- 関係行列

関係とは

- 集合 = モノの集まり
 $J = \{g, c, p\}$
- 関係 = モノとモノの間

例) a は b に勝つ関係

$$\bullet W = \{ (g, c), (c, p), (p, g) \}$$

$$a \text{ は } b \text{ に勝つ} \Leftrightarrow (a, b) \in W$$

2つのモノの関係は,
2項組(順序対)の集合で記述

2人ジャンケンの手の集合

$$J \times J =$$

$$\{(g, g), (g, c), (g, p), \\ (c, g), (c, c), (c, p), \\ (p, g), (p, c), (p, p)\}$$

2人ジャンケンの勝ち

$$J \times J =$$

$$\{(g, g), (g, c), (g, p), \\ (c, g), (c, c), (c, p), \\ (p, g), (p, c), (p, p)\}$$

2人ジャンケンの勝ち

$$W =$$

$$\{(g, c), (c, p), (p, g)\}$$

$$W \subseteq J \times J$$

2人ジャンケンの手の一部

例題1

3人ジャンケンの1人勝ちの関係を表す
集合 V , すなわち,

$$(a, b, c) \in V \Leftrightarrow a \text{ は } b \text{ と } c \text{ に勝つ}$$

を内包的定義で記述せよ.

ただし, 2ジャンケンの勝ちの関係を W ,
すなわち,

$$(a, b) \in W \Leftrightarrow a \text{ は } b \text{ に勝つ}$$

とする.

答え

$$V = \{(a, b, b) \mid (a, b) \in W\}$$

例題2

次のとき M の外延的定義は？

$$A = \{\text{フネ, サザエ, タイコ}\}$$

$$B = \{\text{サザエ, カツオ, タラオ, イクラ}\}$$

$$M \subseteq A \times B$$

$$(a, b) \in M \Leftrightarrow a \text{ は } b \text{ の母}$$

答え

$$M =$$

$$\{(\text{フネ, サザエ}), (\text{フネ, カツオ}),$$
$$(\text{サザエ, タラオ}),$$
$$(\text{タイコ, イクラ})\}$$

2項関係

- 2項組の集合による関係
- $R \subseteq A \times B$ のとき
関係 R は2項関係である

関係行列

- 2項関係を表す行列
たとえば, 以下のとき,
 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$
 $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$
 $R \subseteq A \times B$
次の行列で表す:

関係行列

$$M_R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & & \\ r_{31} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ r_{m1} & \dots & & r_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで } r_{ij} = \begin{cases} 0 & (a_i, b_j) \notin R \text{ のとき} \\ 1 & (a_i, b_j) \in R \text{ のとき} \end{cases}$$

例題3

- 例題2の関係を表す行列は？

答え

$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{サザエ} & \text{カツオ} & \text{タラオ} & \text{イクラ} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{フネ} \\ \text{サザエ} \\ \text{タイコ} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

練習

•プリント