離散数学 ⑥

徳久雅人

集合論
（関数）

2012.5/21

離散数学の教育目標

- 記号論理 ― 条件を書く / 推論する
- 集合論　データを書く，計算する
- グラフ理論　データの構造を書く，計算する

（シラバス）15週の計画

- 1〜4週：　記号論理
- 5〜9週：　集合論
- 10〜14週：グラフ理論
- 15週：　補足

（復習）

- $\boldsymbol{P}((\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{B})$を求めよ

  $\boldsymbol{A} = \{1, 2\}$

  $\boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}\}$

  $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M})$は集合$\boldsymbol{M}$のベキ集合

答え

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

$\boldsymbol{B} = \{(1, 1), (2, 2)\}$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{B} = \{(1, 2), (2, 1)\}$

$\boldsymbol{P}((\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}) \oplus \boldsymbol{B})$

$= \{\{(1,2), (2,1)\}, \{(1,2)\}, \{(2,1)\}, \{\}\}$

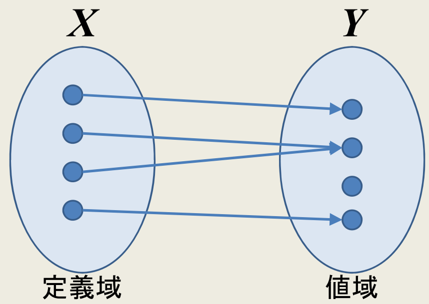
今日のゴール

- 関数とは
- 関数の記述
- 関数の性質
- 特別な関数

関数とは

- ある範囲のモノを，ある範囲のモノに対応付けること
  - 定義域：対応元の範囲（集合）
  - 値域：対応先の範囲（集合）
  - 定義域のいずれの要素も，それぞれ1つの対応先がある．

関数のイメージ



関数の記述

① $f : X \to Y$

② $X \xrightarrow{f} Y$

③ $f : a \longmapsto b$

④ $b = f(a)$

⑤ f は X から Y への関数である

X は定義域，Y は値域，a は変数値，b は関数値

関数表

$$f = \begin{pmatrix} \text{山田} & \text{鈴木} & \text{小松} & \text{杉野} \\ \text{書記} & \text{会長} & \text{会計} & \text{書記} \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} \text{会長} & \text{会計} & \text{書記} \\ 100 & 80 & 70 \end{pmatrix}$$

関数を使ってみる

$f(\text{山田}) = \text{書記}$

$g(\text{書記}) = 70$

$g(f(\text{山田})) = g(\text{書記}) = 70$

合成関数

$g(f(\text{山田})) = g(\text{書記}) = 70$

$g \circ f(\text{山田}) = 70$

関数の性質

- 単射
  $\Leftrightarrow (f(a) = f(b)) \rightarrow (a = b)$
  $\Leftrightarrow (a \neq b) \rightarrow (f(a) \neq f(b))$
- 全射
  $\Leftrightarrow (\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$
- 全単射
  $\Leftrightarrow$ 全射 かつ 単射

資料の訂正

- 「変数値と関数値が1対1で対応していることを表す」
  - 全単射のこと

単射？全射？全単射？

$y, x \in R$, $s, t \in Z$ において,

1. $y = x$
2. $y = x^2$
3. $s = \mathrm{round}(x)$
   … x を四捨五入
4. $s = \mathrm{prime}(t)$
   … t 番目の素数

特別な関数

- 恒等関数
  f が恒等関数である
  $\Leftrightarrow (\forall x \in X)\ f(x) = x$
  $f = I_X$ と書く

特別な関数

- 逆関数 f^{-1}
  関数 $f : X \rightarrow Y$ が全単射ならば
  $f \circ g = I_Y, \quad g \circ f = I_X$
  となる関数 $g : Y \rightarrow X$ が
  ただ一つ存在し,
  g を f の逆関数という.

（つづき）

- 逆も言える
  g が f の逆関数ならば f は全単射である.