

離散数学 ⑤

徳久雅人

集合論 (集合の定義と演算)

2012.5/14

離散数学の教育目標

- 記号論理 } 条件を書く
推論する
- 集合論 } データを書く, 計算する
- グラフ理論 } データの構造を書く, 計算する

15週の計画

- 1～4週: 記号論理
- 5～9週: 集合論
- 10～14週: グラフ理論
- 15週: 補足

今日のゴール

- 集合とは
- 集合の定義
- 集合の演算

集合とは

- 相異なるモノの集まり

$$A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

A は集合(set)

1 や 2 などは要素, 元(element)

$\{ \}$ は集合を表す記号

集合とは

- 相異なる = 重複無視
 $\{ 1, 2, 1, 2 \}$ と $\{ 1, 2 \}$ は同じ
- 順不問
 $\{ 1, 2, 3 \}$ と $\{ 3, 2, 1 \}$ は同じ

集合の要素

- 要素である=帰属する

$$a \in A$$

(意味) a は集合 A の要素である

$$b \notin A$$

(意味) b は集合 A の要素でない

要素になれるもの

- なんでもなれる
 - 数字, 英字, かな, 人名, ...
 - 集合を要素にすることもある
(集合の集合は族と呼ばれる)
 - 式, n -項組, ...

(1,2) は2項組
(B12T2001, "太郎", 18歳) は3項組

n -項組, n -tuple, 順序対

- 値の組を作るための数学の記法
例) 2次元ベクトルや座標 (x, y)
- 順序に意味がある
(1, 2) と (2, 1) は別物
- 数値以外も組にできる
(太郎, 18歳) や (\spadesuit, A)

要素数による集合の種類

- 有限集合
 - 有限個の要素を持つ集合
 - $|A|$ 集合 A の要素数を表す
- 無限集合
 - 要素が無限に存在する集合
- 空集合
 - 要素が全く無い集合
 - $\{ \}$ または \emptyset または \varnothing と書く

集合の定義方法

- 外延的定義(列挙する)
 $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$
- 内包的定義(条件を書く)
 $A = \{ 2n \mid 1 \leq n \leq 5, n \text{ は整数} \}$

要素を表す

要素を決める条件を書く

練習

- プリント

集合の演算

その前に

- 全体集合 (普遍集合)
– 議論したい全要素の集合

※ 以下のパワポで、
集合 A と B の全体集合は同じとする

集合の演算

- ① 部分集合 ...真偽を算出
– 集合が別の集合を含むか？

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X (x \in A \rightarrow x \in B)$$

X は全体集合

※ 「 A の全体集合が X である」とは
「 $A \subseteq X$ (A は X の部分集合)」ともいう

集合の演算

- ② ベキ集合 ...集合を算出
– 全ての部分集合の集合

$$P(A) = 2^A = \{B \mid B \subseteq A\}$$

集合の演算

- ③ 等号 ...真偽を算出
– 集合が等しいか？

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

集合の演算

- ④ 不等号 ...真偽を算出
– 集合が異なるか？

$$A \neq B \Leftrightarrow \neg (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

集合の演算

- ⑤ 真部分集合 ...真偽を算出
– 部分集合だが等号ではないか？

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \neq A$$

集合の演算

⑥ 和集合 ...集合を算出

-2つの集合の要素をあわせた集合

$$A \cup B \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$$

集合の演算

⑦ 積集合 ...集合を算出

-2つの集合で共通の要素の集合

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

集合の演算

⑧ 補集合 ...集合を算出

-集合に属さない要素の集合

$$A^C \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \notin A\}$$

集合の演算

⑨ 差集合 ...集合を算出

-一方の集合からもう一方の集合に属する要素を除いた集合

$$A - B \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

集合の演算

⑩ 直和 ...集合を算出 2つは互いに素な集合という

-重ならない2つの集合に対して、
両方の要素を合わせた集合

$$A + B$$

$$\Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \cup B, A \cap B = \emptyset\}$$

集合の演算

⑪ 直和分割 ...集合を算出

-1つの集合を複数の互いに素な集合に分けること

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

※ C_i をブロックという ($i=1, 2, \dots, n$)

集合の演算

⑫ 排他的論理和の集合

...集合を算出

-2つの集合のどちらか一方だけに属する要素をあつめた集合

$$A \oplus B \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A)$$

集合の演算

⑬ 直積...集合を算出

-各集合から要素を1つずつ取り出して作った n -項組の集合

$$A \times B \Leftrightarrow \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

集合演算の性質

- 資料参照

練習

- プリント