離散数学 ③

徳久雅人

記号論理
（述語論理と同値変形）

2012.5/7

（復習）練習問題

- 次の命題論理式を標準形にしよう

1. $P \leftrightarrow Q$

答え合わせ

$$
\begin{aligned}
& P \leftrightarrow Q \\
\Leftrightarrow\ & (P \to Q) \land (Q \to P) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P) \quad \text{… 連言標準形} \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg P \lor Q) \land \neg Q) \lor ((\neg P \lor Q) \land P) \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg Q)) \lor ((\neg P \land P) \lor (Q \land P)) \\
\Leftrightarrow\ & ((\neg P \land \neg Q) \lor \mathrm{F}) \lor (\mathrm{F} \lor (Q \land P)) \\
\Leftrightarrow\ & (\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land P) \quad \text{… 選言標準形}
\end{aligned}
$$

今日のゴール

- 命題関数
- 述語論理
- 述語論理式の同値変形

命題関数

- 不確定なものを含む言明
  $A(x) =$ “x は偶数である”
  $W(x, y)$
  $=$ “ジャンケンで x は y に勝つ”
- 変数に値が代入されてから，言明の真偽が確定

述語論理

- 命題関数の引数をある程度想定し，真偽を解釈する論理

値の想定

- 限定作用素
  - 全称作用素 ∀：すべての～
  - 存在作用素 ∃：適切な～

真偽を考えてみよう

$A(x)$ = “xは偶数である”

$\forall x A(x)$

$\exists x A(x)$

限定作用素の係り先

$\forall x(P(x) \to Q(x))$

＿＿を束縛する

$\forall x P(x) \to Q(x)$

＿＿を束縛する

＿＿は自由である

真偽を考えてみよう

$A(x)$ = “xは4で割り切れる”

$B(x)$ = “xは2で割り切れる”

1. $\forall x(A(x) \to B(x))$
2. $\forall x B(x) \to \exists x A(x)$

2変数のとき真偽を考えよう

$W(x, y)$ = “ジャンケンで x が y に勝つ”

1. $\forall x W(x, y)$
2. $\forall x(\forall y W(x, y))$
3. $\forall x(\exists y W(x, y))$
4. $\exists x(\forall y W(x, y))$
5. $\exists x(\exists y W(x, y))$

ただし，x と y は，グー，チョキ，パーのいずれかとする．

練習問題

- プリント

  1と2をやってみよう

同値な論理式

- 表5

分配の注意点

- 同値

$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge R(x))$

$\exists x P(x) \vee \exists x R(x) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \vee R(x))$

- 一方向

$\forall x P(x) \vee \forall x R(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee R(x))$

$\exists x(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$

確認1

$\forall x P(x) \vee \forall x R(x)$が真とすると

$\forall x P(x) \leftrightarrow \mathrm{T}$ または $\forall x R(x) \leftrightarrow \mathrm{T}$

である．ゆえに

$\forall x(P(x) \vee R(x))$

$\leftrightarrow \forall x(\mathrm{T} \vee R(x)) \vee \forall x(P(x) \vee \mathrm{T})$

$\leftrightarrow \mathrm{T} \vee \mathrm{T}$

$\leftrightarrow \mathrm{T}$

ゆえに

$\forall x P(x) \vee \forall x R(x) \Rightarrow \forall x(P(x) \vee R(x))$

確認2

$\forall x P(x) \vee \forall x R(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee R(x))$

は言えるのか？ どんなPやRでも成立しなければならない：

$R(x) = \neg P(x)$ であり，$x = a$のときのみ$P(x)$は真になるとすると

$\forall x P(x) \vee \forall x R(x)$

$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x)$

$\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \neg \exists x P(x)$

$\Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \neg(\mathrm{T})$

$\Leftrightarrow \mathrm{F} \vee \mathrm{F}$

$\Leftrightarrow \mathrm{F}$

一方

$\forall x(P(x) \vee R(x))$

$\Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$

ゆえに，同値ではない．

また，右辺が真でも左辺が真になるとは限らない．

確認3

$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

の待遇を同値変形すると，

$\neg \forall x(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \neg\{\forall x A(x) \vee \forall x B(x)\}$

$\leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \wedge \neg B(x)) \Rightarrow \exists x \neg A(x) \wedge \exists x \neg B(x)$

ここで $P(x) \Leftrightarrow \neg A(x)$, $R(x) \Leftrightarrow \neg B(x)$ とすると

〈与式〉

$\leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge R(x)) \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x R(x)$

練習問題

- プリント