離散数学 ②

徳久雅人

記号論理
（同値な論理式と変形）

2012.4/23

（復習）練習問題

- 次の命題論理式の真理値表を書こう

1. $P \to \neg Q$
2. $P \vee Q \wedge R$

今日のゴール

- 同値な論理式
- 命題論理式の同値変形
- 標準形

同値な論理式

- 論理式と論理式が同値

2つの論理式が同じ真理値表

$P \to Q$ と $\neg P \vee Q$

同値な命題論理式

$$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$$

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
T	T	T	F	T	T

同値でない命題論理式

$$(P \to Q) \leftrightarrow (P \vee Q)$$

P	Q	$P \to Q$	$P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
F	F	T	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	T	F
T	T	T	T	T

同値な式を確認しよう

プリント

$$(P \to \mathrm{F}) \leftrightarrow \neg P$$

いろいろな同値な式

（配布資料）

同値な式を確認しよう(2)

プリント：

真理値表で分配律を証明せよ

$$(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$$

同値変形

- 「同値な式」を用いて変形

$$\neg((A \wedge B) \wedge C)$$
$$\leftrightarrow (\neg(A \wedge B) \vee \neg C)$$
$$\leftrightarrow ((\neg A \vee \neg B) \vee \neg C)$$

標準形

（高校生も知っている）普通の数学のとき

$$(x+a)(y+b) = xy + bx + ay + ab$$

全体が積でつながっている.
部品が和でできている.

全体が和でつながっている.
部品が積でできている.

2通り

命題論理の場合

$$((X \vee A) \wedge (Y \vee B))$$
$$\leftrightarrow$$
$$((X \wedge Y) \vee (X \wedge B) \vee (A \wedge Y) \vee (A \wedge B))$$

全体が論理積，部品が論理和

全体が論理和，部品が論理積

連言標準形の論理式C

全体が論理積,部品が論理和

- $C = C1 \wedge C2 \wedge \ldots \wedge Cn$
  $(n \geq 1)$
- $Ci = Pi1 \vee Pi2 \vee \ldots \vee Pim$
  $(m \geq 1)$
- $Pjk =$ 基本論理式，または
  ¬付き基本論理式

選言標準形の論理式D

全体が論理和,部品が論理積

- $D = D1 \vee D2 \vee \ldots \vee Dn$
  $(n \geq 1)$
- $Di = Pi1 \wedge Pi2 \wedge \ldots \wedge Pim$
  $(m \geq 1)$
- $Pjk =$ 基本論理式，または
  ¬付き基本論理式

標準形の作成手順

1. 含意と同値の除去
2. 否定が基本論理式に直接接するように変形
3. 分配律を用いて変形

標準形を求めてみよう

$(P \to Q) \wedge (P \to R)$ 含意の除去

$\leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$

連言標準形

標準形を求めてみよう

$(P \to Q) \wedge (P \to R)$ 含意の除去

$\leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$ 分配律: $\wedge(\neg P \vee R)$

$\leftrightarrow \{\neg P \wedge (\neg P \vee R)\} \vee \{Q \wedge (\neg P \vee R)\}$ 分配律: $\neg P \wedge$ と $Q \wedge$

$\leftrightarrow \{(\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge R)\} \vee \{(Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R)\}$

$\leftrightarrow \{(\neg P) \vee (\neg P \wedge R)\} \vee \{(Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R)\}$

$\leftrightarrow \neg P \vee (\neg P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$

選言標準形

標準形を求めてみよう

$(P \to Q) \wedge (P \to R)$ 含意の除去

$\leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)$ 分配律: $\wedge(\neg P \vee R)$

$\leftrightarrow \{\neg P \wedge (\neg P \vee R)\} \vee \{Q \wedge (\neg P \vee R)\}$ 分配律: $\neg P \wedge$ と $Q \wedge$

$\leftrightarrow \{(\neg P \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge R)\} \vee \{(Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R)\}$

$\leftrightarrow \{(\neg P) \vee (\neg P \wedge R)\} \vee \{(Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge R)\}$

$\leftrightarrow \neg P \vee (\neg P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$

$\leftrightarrow \neg P \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$ 吸収律: $\neg P \vee (\neg P \wedge R)$

$\leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R)$

選言標準形