# 離散数学・中テスト（2012.7/30）　　学籍番号：　　　　　　　　氏名：

1. 真理値表を見て，命題論理式を作りなさい．

| ***A*** | ***B*** | 式 1 | 式 2 | 式 3 | 式 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **T** | **F** | **F** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **F** | **T** | **F** | **T** |
| **T** | **T** | **T** | **F** | **F** | **F** |

式 1 ⇔ $A \wedge B$

式 2 ⇔ $A \wedge \neg B$

式 3 ⇔ $\neg A \wedge B$

式 4 ⇔ $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

| ***A*** | ***B*** | ***C*** | 式 5 | 式 6 | 式 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **T** | **F** | **F** | **T** |
| **F** | **T** | **F** | **F** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **T** | **F** | **F** | **F** |
| **T** | **F** | **F** | **F** | **F** | **F** |
| **T** | **F** | **T** | **F** | **F** | **T** |
| **T** | **T** | **F** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **T** | **T** | **F** | **F** | **F** |

式 5 ⇔ $A \wedge B \wedge \neg C$

式 6 ⇔ $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \Leftrightarrow (B \wedge \neg C)$

式 7 ⇔ $(B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)$

2. 集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．命題関数 $L(x, y)$ = “$x$ は $y$ 以下である” に関して次の問に答えなさい．

(1) 下記の集合 $A$ の要素を具体的に列挙せよ．

$A = \{\ x \in X \mid \forall y \in X\ L(x, y)\ \}$
$= \{\ 1\ \}$

(2) 下記の関係 $R$ の要素を具体的に列挙せよ．

$R = \{\ (x, y) \in X \times X \mid L(x,y)\ \}$
$= \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5), (4,4), (4,5), (5,5)\}$

(3) (2)の $R$ を関係行列 $M_R$ で表現せよ．なお，関係行列の $i$ 行 $j$ 列目の要素は，$(i, j) \in R$ ならば 1 であり，$(i, j) \notin R$ ならば 0 とする．

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(4) (2)の R は，全順序関係である．ハッセ図を描きなさい．

5
|
4
|
3
|
2
|
1

3. 単位判定の式を考えよう．集合 $N$ を学生名の集合とする．集合 $S$ は得点の集合であり，0 以上 100 以下の整数の集合とする．

(1) 学生名から得点への関数 $f$ を表すものを全て答えよ．
イ, ウ, オ

ア... $f: N \times S$　　イ... $f: N \to S$　　ウ... $y = f(x),\ y \in S,\ x \in N$
エ... $f: y \longmapsto x,\quad y \in S,\ x \in N$　　オ... $N \xrightarrow{f} S$

(2) 関数 $f$ は,「全射」,「単射」,「全単射」,「いずれでもない」のうちどれか？
いずれでもない

(3) 単位ラベルとして「○, △, ×」があり, 単位ラベルの集合を $L$ とする. 得点が 80 点以上ならば「○」，60 点以上 80 点未満ならば「△」，60 点未満ならば「×」となるものとする. 得点から単位ラベルへの関数 $g$ を, (1)にならい, 形式的に表せ.

$g: S \to L,\quad S \xrightarrow{g} L,\quad y = g(x),\quad g: x \longmapsto y$
※ ここで $x \in S,\ y \in L$

(4) 関数 $g$ は,「全射」,「単射」,「全単射」,「いずれでもない」のうちどれか？
全射

(5) 学生名から単位ラベルへの関数を, $f$ と $g$ の合成関数で表せ. なお, $x$ を学生名, $y$ を単位ラベルとせよ.

$y = g \circ f(x)$

(6) 単位ラベルが「○」の学生名の集合 $G$ について, 内包的定義を示せ.

$G = \{\ n \in N \mid\ g \circ f(n) = ○\ \}$

(7) 単位ラベルで学生名を 3 つのグループに分ける．関係 $E \subseteq N \times N$ は，同じグループになる学生名を表す関係である．たとえば，α 者と β 者と χ 者が「○」を取得し，δ 者と ε 者が「△」を取得したとすると，$E$={(α 者, α 者), (α 者, β 者), (α 者, χ 者), (β 者, α 者), (β 者, β 者), (β 者, χ 者), (χ 者, α 者), (χ 者, β 者), (χ 者, χ 者), (δ 者, δ 者), (δ 者, ε 者), (ε 者, δ 者), (ε 者, ε 者)}である．$E$ の内包的定義を示せ．

$E = \{\ (a, b) \in N \times N \mid g \circ f(a) = g \circ f(b)\ \}$

(8) 反射性, 対称性, 反・対称性, 推移性, 比較可能性について, (7)で定義した $E$ が満たすものを全て述べよ.
反射性, 対称性, 推移性

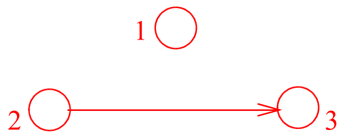
(9) 単位ラベルが「○」の者 $a$ は「△」や「×」の者 $b$ より上,「△」の者 $a$ は「×」の者 $b$ より上ということを $(b, a)$ とし, この関係を $W \subseteq N \times N$ とする. $W$ の内包的定義を示せ.

$W = \{(a, b) \in N \times N \mid \{\ g \circ f(b) = △\ \wedge g \circ f(a) = ×\ \} \vee$
$\{\ g \circ f(b) = ○\ \wedge (g \circ f(a) = △\ \vee g \circ f(a) = ×)\ \}\ \}$

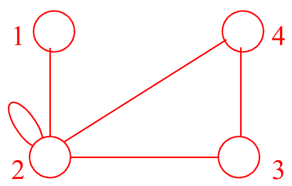
(10) 反射性, 対称性, 反・対称性, 推移性, 比較可能性について, (9)で定義した $W$ が満たすものを全て述べよ.
反・対称性, 推移性

## 4. グラフの演算を行い，その結果をグラフで描きなさい．

(1) ({1,2,3}, {(1,2),(2,3)}) ∩ ({1,2,3},{(1,3),(2,3)})

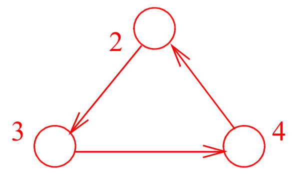



(2) ({1,2,3}, {{1,2},{2},{2,3}}) ∪ ({1,2,3,4},{{1,2},{2,4},{3,4}})




(3) ({1,2,3,4}, {(1,2),(2,3),(3,4),(4,1),(4,2)}) | {2,3,4}

※ $(V, E) \mid V' = (V', E \cap (V' \times V'))$

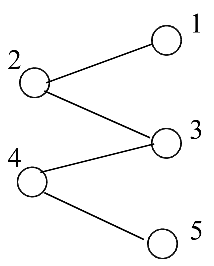


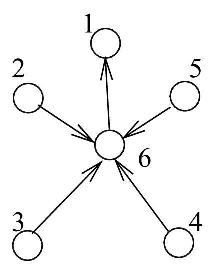

## 5. ２部グラフ $(V_1, V_2, E)$ に関して，各問に答えなさい．

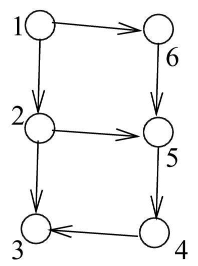
(1) 2部グラフの説明文が成立するように，空欄に集合演算の式を記入しなさい．

> 2部グラフの頂点集合は，$\boxed{V_1 \cup V_2}$ である．$V_1$ と $V_2$ は互いに素なので，$\boxed{V_1 \cap V_2}$ = { } となる．辺については，端点の一方が $V_1$ の頂点でありもう一方が $V_2$ の頂点なので，有向グラフならば，$E \subseteq \boxed{(V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)}$ となる．

(2) 次のグラフのうち2部グラフではないものに×印を入れなさい．2部グラフの場合，$V_1$ と $V_2$ を示しなさい．



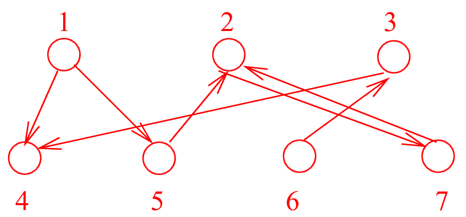




$V_1$={2,4}
$V_2$={1,3,5}

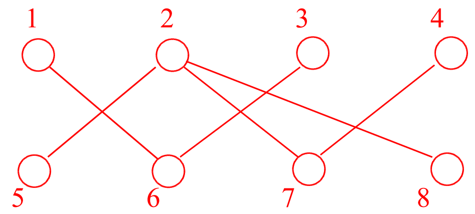
$V_1$={1,2,3,4,5}
$V_2$={6}

$V_1$={1,3,5}
$V_2$={2,4,6}

(3) $V_1$ = { 1, 2, 3 }, $V_2$ = { 4, 5, 6, 7 }, $E$ = {(1,4), (1,5), (2, 7), (3, 4), (5, 2), (6, 3), (7, 2) } である2部グラフを描きなさい．

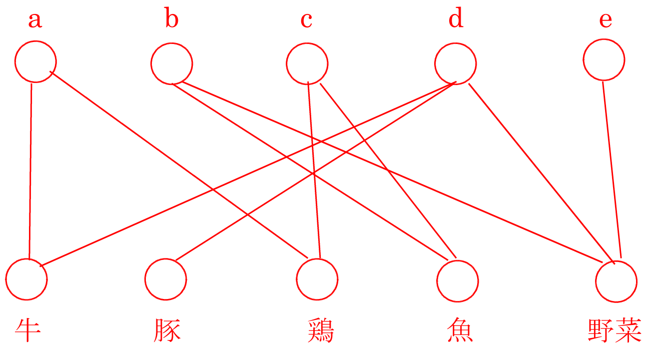



(4) $V_1$ = { 1, 2, 3, 4 }, $V_2$ = { 5, 6, 7, 8 }, $E$ = { {1,6}, {2,5}, {2,7}, {2,8}, {3,6}, {4,7} }) である2部グラフを描きなさい．




(5) 人物の集合 $V_1$ = {a, b, c, d, e}，コース料理の集合 $V_2$={牛, 豚, 鶏, 魚, 野菜} がある．a は牛肉コースまたは鶏肉コースを希望し，b は魚コースまたは野菜コースを希望し，c は鶏肉コースまたは魚コースを希望し，d は牛肉コース，豚肉コース，または，野菜コースを希望し，そして e は野菜コースを希望している．

人物と料理の対応を，2部グラフ（無向グラフ）を描きなさい．




次に，集合の形式でグラフを記述しなさい．

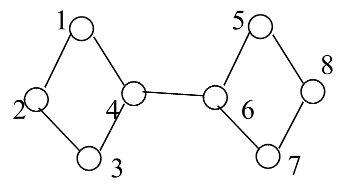
({a, b, c, d, e}, {牛, 豚, 鶏, 魚, 野菜},
{{a, 牛}, {a, 鶏}, {b, 魚}, {b, 野菜}, {c, 鶏}, {c, 魚},
{d, 牛}, {d, 豚}, {d, 野菜}, {e, 野菜} } )

あいにく，各コースとも1人ぶんしか残っていない．できるだけ多くの人物が希望通りとなるには，人物と料理をどのように対応させるべきか？2部グラフの辺集合の部分集合として答えなさい．

{{a, 牛}, {b, 魚}, {c, 鶏}, {d, 豚}, {e, 野菜} } )

## 6. 以下に示す連結なグラフから，頂点だけあるいは辺だけを削除して非連結にしたい．最小の削除数となるような頂点や辺をそれぞれ答えなさい．

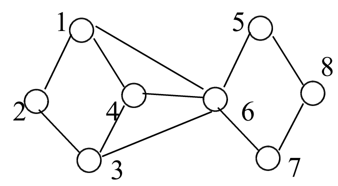
(1)




頂点= 4 など

辺= {4,6}

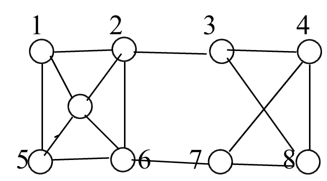
(2)




頂点= 6

辺= {6,5} かつ {6,7} など

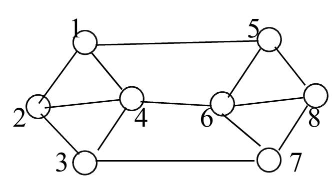
(3)




頂点= 3 かつ 7 など

辺= {2,3} かつ {6,7}

(4)




頂点= 1 かつ 4 かつ 3 など

辺= {1, 5} かつ {4, 6}
かつ {3, 7} など