

1. 命題論理式  $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$  について各問に答えなさい。

(1) 真理値表を作りなさい。

A	B	C	$A \rightarrow B$	$A \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T
T	T	T	T	T	T

(2)  $A \rightarrow (B \vee C)$  と同値であることを証明せよ。

$$\begin{aligned}
 (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (\neg A \vee C) && \text{[含意の除去]} \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee \neg A \vee B \vee C && \text{[結合律]} \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee B \vee C && \text{[べき等律]} \\
 &\Leftrightarrow A \rightarrow (B \vee C) && \text{[含意の除去(の逆方向)]}
 \end{aligned}$$

2. 1つの集合  $X$ , 2つの命題関数  $P(x), Q(x, y)$  を以下のとおりとするとき, 各問に答えなさい。

$$\begin{aligned}
 X &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
 P(x) &= \text{“}x \text{ は偶数である”} \\
 Q(x, y) &= \text{“}x + y \text{ は偶数である”}
 \end{aligned}$$

2-1 次の述語論理式の真偽を答えなさい。

- $\forall x \{ P(x) \rightarrow Q(x, x) \}$   
真 ( $Q(x, x) = \text{“}x+x \text{ は偶数である”} = \text{“}2x \text{ は偶数である”} \Leftrightarrow \mathbf{T}$ )
- $\forall x \forall y \{ P(x) \rightarrow Q(x, y) \}$   
偽 (例えば  $x=1, y=2$  のとき偽なので, 全ての  $x, y$  では真にならない)
- $\forall x \exists y \{ P(x) \rightarrow Q(x, y) \}$   
真 (たとえば  $y = x$  のとき, (1) のとおり)
- $\exists x \forall y \{ P(x) \rightarrow Q(x, y) \}$   
真 (たとえば  $x = 1$  のとき,  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Q}(x, y) \Leftrightarrow \mathbf{T}$  となるから)
- $\forall y \exists x \{ P(x) \rightarrow Q(x, y) \}$   
真 (たとえば  $x = 1$  のとき,  $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{Q}(x, y) \Leftrightarrow \mathbf{T}$  となるから)

2-2 集合  $Y = \{x \in X \mid y = x/3, Q(x, y)\}$  とする。

(1)  $Y$  の要素を列挙せよ。

$$Y = \{0, 3, 6, 9\}$$

(2)  $\sum_{y \in Y} (y + 1) = (0+1) + (3+1) + (6+1) + (9+1) = 22$

3. 知識を測る実験を想定しよう。

被験者に 10 問提示し, 被験者は「分からない」, 「Yes」, 「No」を答えることにする。3 人の被験者の成績を次の 2 つの評価式 (a) および (b) で決めることにする。

$$P(A, O_i) = |A \cap O_i| / |O_i| \quad \dots\dots\dots(a)$$

$$R(A, O_i) = |A \cap O_i| / |A| \quad \dots\dots\dots(b)$$

$A, O_i \subseteq N \times M$

$i$  は被験者の番号

$N = [1, 10]$  ※ 1 以上 10 以下の数の集合. 問題番号.

$M = \{ \text{Yes}, \text{No} \}$

ここで, 10 問の問題の正解は次のとおりとする。  $|A|=10$  である。

$$A = \{ (1, \text{Yes}), (2, \text{Yes}), (3, \text{No}), (4, \text{Yes}), (5, \text{No}), (6, \text{No}), (7, \text{Yes}), (8, \text{No}), (9, \text{Yes}), (10, \text{No}) \}$$

被験者1の回答は次のとおりとする。

$$O_1 = \{ (1, \text{Yes}), (2, \text{No}), (3, \text{Yes}), (4, \text{No}), (7, \text{Yes}), (8, \text{No}) \}$$

ここで, 被験者1は, 6つの問に答えて  $|O_1| = 6$  である。5問目, 6問目, 9問目, 10問目は「分からない」という。各問に答えなさい。

(1)  $A \cap O_1 = \{ (1, \text{Yes}), (7, \text{Yes}), (8, \text{No}) \}$

(2)  $|A \cap O_1| = 3$

(3)  $P(A, O_1) = 3 / 6 = 1 / 2$

(4)  $R(A, O_1) = 3 / 10$

(5) 被験者2は, 奇数番目に Yes と答え, 偶数番目に No と答えたとする。被験者2を評価せよ。

$$O_2 = \{ (1, \text{Yes}), (2, \text{No}), (3, \text{Yes}), (4, \text{No}), (5, \text{Yes}), (6, \text{No}), (7, \text{Yes}), (8, \text{No}), (9, \text{Yes}), (10, \text{No}) \}$$

$$P(A, O_2) = 6 / 10 = 3 / 5$$

$$R(A, O_2) = 6 / 10 = 3 / 5$$

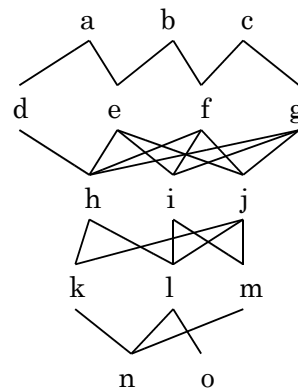
(6) 被験者3は, 1問目から7問目まで, 各問に「Yes」と「No」の両方を答えたとする。被験者3を評価せよ。

$$O_3 = \{ (1, \text{Yes}), (1, \text{No}), (2, \text{Yes}), (2, \text{No}), (3, \text{Yes}), (3, \text{No}), (4, \text{Yes}), (4, \text{No}), (5, \text{Yes}), (5, \text{No}), (6, \text{Yes}), (6, \text{No}), (7, \text{Yes}), (7, \text{No}) \}$$

$$P(A, O_3) = 7 / 14$$

$$R(A, O_3) = 7 / 10$$

4. 次のハッセ図をみて答えなさい。



全体集合  $X = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o \}$ , 半順序関係  $R \subseteq X^2$ ,  $U = \{ h, i, j \}$  とする。

(定義)

$$U \text{ の上界} = \{ x \in X \mid \forall y \in U (y \leq_R x) \}$$

$$U \text{ の最大元} = \{ x \in U \mid \forall y \in U (y \leq_R x) \}$$

$U$  の極大元

$$= \{ x \in U \mid \forall y \in X (x \leq_R y \wedge x \neq y \rightarrow y \notin U) \}$$

$U$  の上限 =  $U$  の上界の最小元

(1)  $U$  の上界 =  $\{ a, b, c, e, f, g \}$  (2)  $U$  の下界 =  $\{ l, n, o \}$

(3)  $U$  の最大元 =  $\{ \}$  (4)  $U$  の最小元 =  $\{ \}$

(5)  $U$  の極大元 =  $\{ h, i, j \}$  (6)  $U$  の極小元 =  $\{ h, i, j \}$

(7)  $U$  の上限 =  $\{ \}$  (8)  $U$  の下限 =  $\{ l \}$

(9)  $V = \{ i, j, l, m, n, o \}$  とし,  $S = R \cap V^2$  とする。  $S$  の関係行列  $M_S$  を示せ。(ヒント)  $(n, l) \in S$  だが,  $(l, n) \in S$  ではない。

$$M_S = \begin{matrix} & \begin{matrix} i & j & l & m & n & o \end{matrix} \\ \begin{matrix} i \\ j \\ l \\ m \\ n \\ o \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$