

集合論

2012.5 徳久雅人

1 集合とその記法

集合(set)とは、「相異なるモノの集まり」である。集まったものを 1 つのものとして扱うために、集合という考え方が作られた。集合を表すために、大文字のアルファベットがよく用いられる。集合に集められたモノのことを**要素**あるいは**元(element)**という。要素を表すために、小文字のアルファベットがよく用いられる。要素 x が集合 X の要素であることを、 $x \in X$ と書く。要素 y が集合 X の要素でないことを、 $y \notin X$ と書く。

集合を定義するには、次の 2 つの方法がある。

- 外延的定義(列挙式定義):要素を中括弧の中に列挙する。

例. $N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

- 内包的定義(条件による定義):要素の一般形と条件で定義する。

例. $N = \{ n \mid n \in \mathbf{Z}, 0 \leq n \leq 9 \}$ ここで \mathbf{Z} を整数の集合とする

集合には 0 個以上の要素が含まれている。集合に含まれる要素の個数は、濃度あるいは基数という。集合 X の要素数は、 $|X|$ と書く。有限個の要素からなる集合を**有限集合**という。無限個の要素からなる集合を**無限集合**という。要素数が 0 個の集合を**空集合**といい、 $\phi, \emptyset, \{ \}$ という 3 通りの書き方がある。

1 つの集合の要素には重複がない。集合の中で要素の並び順に区別はない。

- 2 つの集合 $\{ 1, 2, 3 \}$ と $\{ 1, 1, 2, 2, 3 \}$ は同じ集合である。
- 2 つの集合 $\{ 1, 2, 3 \}$ と $\{ 3, 2, 1 \}$ は同じ集合である。

2 集合演算

2.1 いろいろな演算

全体集合: 要素の全体を表す集合を**全体集合**あるいは**普遍集合**という。

部分集合: 2 つの集合 A, B について、 A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$ と書き、次のように定義する。

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in X (x \in A \rightarrow x \in B)$$

ここで、集合 A, B はそれぞれ全体集合 X の部分集合であるものとする。

ベキ集合: 集合 A の部分集合の集合を、 A のベキ集合と呼び、 $P(A)$ または 2^A と書く。

等号: 2 つの集合 A, B が等しいことを、 $A = B$ と書き、次のように定義する。

$$A = B \Leftrightarrow A \supseteq B \wedge A \subseteq B$$

不等号: 2 つの集合 A, B が等しくないことを、 $A \neq B$ と書き、次のように定義する。

$$A \neq B \Leftrightarrow \neg (A \supseteq B \wedge A \subseteq B)$$

真部分集合: 2 つの集合 A, B について、 A は B の部分集合であるが、等しくないことを A は B の真部分集合であると言い、 $A \subset B$ と書き、次のように定義する。

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$$

和集合: 2つの集合 A, B の和集合であることを, $A \cup B$ と書き, 次のように定義する.

$$A \cup B \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$$

ここで, 集合 A, B はそれぞれ全体集合 X の部分集合であるものとする.

積集合: 2つの集合 A, B の積集合であることを, $A \cap B$ と書き, 次のように定義する.

$$A \cap B \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

ここで, 集合 A, B はそれぞれ全体集合 X の部分集合であるものとする.

補集合: 集合 A の補集合であることを, A^c と書き, 次のように定義する.

$$A^c \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \notin A\}$$

ここで, 集合 X は全体集合であるものとする.

差集合: 2つの集合 A, B についての差集合を, $A - B$ と書き, 次のように定義する.

$$A - B \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

ここで, 集合 A, B はそれぞれ全体集合 X の部分集合であるものとする.

直和: 2つの集合 A, B の直和を, $A + B$ と書き, 次のように定義する.

$$A + B \Leftrightarrow \{x \in X \mid x \in A \cup B, A \cap B = \emptyset\}$$

ここで, 集合 A, B はそれぞれ全体集合 X の部分集合であるものとする.

直和は, A と B が「互いに素な集合」(つまり, $A \cap B = \emptyset$ であること)である場合のみ成立する演算である. 逆に, ある集合 C を複数の互いに素な集合の直和で表すことを, 直和分割という. このことを $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ と書き, C_i をブロックという($i = 1, 2, \dots, n$).

排他的論理和の集合: 2つの集合 A, B の排他的論理和の集合であることを, $A \oplus B$ と書き, 次のように定義する.

$$A \oplus B \Leftrightarrow (A - B) \cup (B - A)$$

2.2 集合演算の性質

2.2.1 部分集合の性質

- ① 反射性: $A \subseteq A$
- ② 反・対称性: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \rightarrow A = B$
- ③ 推移性: $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$

2.2.2 和集合, 積集合, 補集合の性質

- ① ベキ等律: $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$
- ② 交換律: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$
- ③ 結合律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
- ④ 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ⑤ 吸収律: $A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$
- ⑥ 復元律: $(A^c)^c = A$
- ⑦ ド・モルガンの法則: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

3 関数

3.1 関数の記法

関数とは, ある範囲のものをある範囲のものに対応付けることである. 対応付けられる元の範囲を**定義域**という. 対応付けの先の範囲を**値域**という. 関数を f , 定義域を X , 値域を Y とすると, X と

Y は集合であり、次のように幾通りかの記述ができる。

① $f: X \longrightarrow Y$

② $X \xrightarrow{f} Y$

③ $f: a \mapsto b$

④ $b = f(a)$

⑤ f は X から Y への関数である

ここで、 $a \in X$ 、 $b \in Y$ とし、 a を **変数値**、 b を **関数値** という。

関数の定義は、一般式で定義する他に、**関数表** で定義することもできる。

① $f(x) = 2x + 1$

② $f = \begin{pmatrix} \text{山田} & \text{鈴木} & \text{小松} & \text{杉野} \\ \text{書記} & \text{会長} & \text{会計} & \text{書記} \end{pmatrix}$

ここで、②について、定義域は {山田, 鈴木, 小松, 杉野} であり、値域は {書記, 会長, 会計} である。さらに、 $f(\text{山田}) = \text{書記}$ である。

2 つの関数を合わせて 1 つの関数を作ることができる。この作られた関数を **合成関数** という。

$f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow Z$ の合成関数を $g \circ f$ と書く。 $g \circ f(x) = g(f(x))$ である。

3.2 関数の性質

単射： 次の条件を満たす関数 f は、単射であるという。

$$f(a) = f(b) \rightarrow a = b$$

~~変数値と関数値が 1 対 1 で対応していることを表す。~~

全射： 次の条件を満たす関数 f は、全射であるという。

$$f: X \rightarrow Y$$

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X) f(x) = y$$

値域の全ての要素が関数値になりうることを表す。

全単射： 全射かつ単射の性質を持つ関数を全単射であるという。

変数値と関数値が 1 対 1 で対応していることを表す。

3.3 特別な関数

恒等関数： 次の条件を満たす関数を恒等関数という。

$$f: X \rightarrow X$$

$$f(x) = x$$

また、 $f = I_X$ と書く。

逆関数： 逆関数について次の定理が存在する。

$f: X \rightarrow Y$ が全単射であるならば、

$f \circ g = I_Y$ 、 $g \circ f = I_X$ となる関数 $g: Y \rightarrow X$ がただ 1 つ存在し、 g を f の逆関数という。

また、逆も言える。

g が f の逆関数であるならば、 f は全単射である。

g が f の逆関数であることを $g = f^{-1}$ と書く。

4 関係

4.1 直積

複数の要素を1つにまとめたものを**組み**あるいは**順序対**という。たとえば、(グー, チョキ) は、グーという要素とチョキという要素の組みである。これは、(チョキ, グー) という組みとは異なる。つまり、要素を並べる順序に意味があるので、順序対といわれる。要素が2つのときは、**2つ組み**、**2項組**、あるいは**ペア**という。要素が n 個のときは、 **n 項組**あるいは **n -tuple**という。

直積とは、 n 個の集合から n 項組を要素とする集合を作るといふ集合演算である。2つの集合 X, Y の直積は、 $X \times Y$ と書き、次のとおりに定義する。

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

たとえば、 $X = \{ a, b, c \}$, $Y = \{ 1, 2, 3 \}$ の場合、 $X \times Y = \{ (a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3) \}$ となる。

さらに、 n 個の集合 X_1, X_2, \dots, X_n の直積は、 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ と書き、その要素は、 (x_1, x_2, \dots, x_n) となる。ここで、直積の要素ということとは、 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ と記述する。

同一の集合の直積は、次のように略記できる。

$$A \times A \times A = A^3$$

4.2 関係の表記

関係とは、要素と要素の**結びつき**のことである。直積では、要素と要素の組を全通り、集合にしたが、そのうち意味のある(扱いたい)組だけを集合にしたものを**関係**という。つまり、**関係**とは、直積の部分集合である。

たとえば、ジャンケンの手の集合 J とは、 $J = \{ \text{グー}, \text{チョキ}, \text{パー} \}$ である。ジャンケンをする人A者とB者がジャンケンをするときの前通りの手は、 $J \times J$ の直積で表され、9通りある。このうち、アイコの手は3通りある。アイコという意味のある関係なので、この3通りを $R = \{ (\text{グー}, \text{グー}), (\text{チョキ}, \text{チョキ}), (\text{パー}, \text{パー}) \}$ という集合で書くと、 R は**関係**である。 $J \times J$ と R はの要素を考えると、 $R \subseteq J \times J$ であり、 R は直積 $J \times J$ の部分集合であることが分かる。

「等しい」や「大きい」という比較は、2つの要素の比較が基本である。2つ組みの関係を扱うことは、基本的なことであり、**2項関係**という。要素 a, b についての2項関係 R は、 $a R b$ と書く。これは $(a, b) \in R$ と同値である。

2項関係を具体的に定義する際、**関係行列**が使用されることがある。直積 $X \times Y$ における関係 R について、 $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_m \}$, $Y = \{ y_1, y_2, \dots, y_n \}$ という集合であれば、 R は次のような m 行 n 列の行列 M_R で表すことができる。

$$M_R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ここで、} \quad r_{ij} = \begin{cases} 0 & (x_i, y_j) \notin R \text{ のとき} \\ 1 & (x_i, y_j) \in R \text{ のとき} \end{cases}$$

2 項関係 R の順序対を逆順にしたものを逆関係といい、 R^{-1} と書く。これは次のように定義する。

$$a R^{-1} b = b R a$$

4.3 関係の性質

集合 X に関する 2 項関係 $R \subseteq X^2$ については、次の性質が議論される。

- ① 反射性 ... $\forall x (x R x)$
- ② 対称性 ... $x R y \rightarrow y R x$
- ③ 反・対称性 ... $x R y \wedge y R x \rightarrow x = y$
- ④ 推移性 ... $x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$
- ⑤ 比較可能性 ... $\forall x, y \in X (x R y \vee y R x)$

上記の性質は、全ての関係においていえるものではない。たとえば、ジャンケンのアイコの場合、反射性、対称性、反・対称性、推移性はいえるが、比較可能性はいえない。

推移性に関して、**推移閉包** R^* という用語がある。推移閉包とは、関係 R の要素のうち、推移性により関係付けられる組を全て抽出したものであり、次のように定義される。

$R^* = \{ (x, y) \mid \text{ある } n \geq 1 \text{ および } x_0, x_1, \dots, x_n \in X \text{ が存在し、次の関係を満たす}$

$$(1) x = x_0, y = x_n$$

$$(2) (x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n) \in R \}$$

4.4 順序関係

順序関係とは、集合 X に関する 2 項関係 $R \subseteq X^2$ のうち、反射性、反・対称性、推移性を満たす関係のことである。 $a, b \in X, R \subseteq X^2$ とするとき、「 b は a より R の意味で大きい」ことを、 $a \leq_R b$ と書く。順序関係は、集合 X と関係 R で定義されるので、これらの組 (X, R) を**順序集合**という。

順序関係は、次の 2 種類がある。

- **全順序関係**: 比較可能性を満たす順序関係
- **半順序関係**: 比較可能性を満たさない順序関係

たとえば、整数の集合 \mathbb{N} と数学の不等号 “ \leq ” による順序集合 (\mathbb{N}, \leq) は全順序関係である。一方、トーナメント試合での~~勝ち負け~~**判明する強さ(より強い, または, 等しい)**の関係は半順序関係であり、一部の 2 者間は優劣が不明である。

順序集合 (X, R) に関する用語を示す。ここで、 U は、 $(U \subseteq X) \wedge (U \neq \emptyset)$ とする。

U の上界: $\{ x \in X \mid \forall y \in U (y \leq_R x) \}$

U の下界: $\{ x \in X \mid \forall y \in U (x \leq_R y) \}$

U の最大元: $\{ x \in U \mid \forall y \in U (y \leq_R x) \}$

U の最小元: $\{ x \in U \mid \forall y \in U (x \leq_R y) \}$

U の極大元: $\{ x \in U \mid \forall y \in X (x \leq_R y \wedge x \neq y \rightarrow y \notin U) \}$

U の極小元: $\{ x \in U \mid \forall y \in X (y \leq_R x \wedge x \neq y \rightarrow y \notin U) \}$

U の上限: U の最小上界, すなわち、「 U の上界(集合)」の最小元

U の下限: U の最大下界, すなわち、「 U の下界(集合)」の最大元

4.5 同値関係

同値関係とは, 集合 X に関する 2 項関係 $R \subseteq X^2$ のうち, 反射性, 対称性, 推移性を満たす関係のことである. $a, b \in X, R \subseteq X^2$ とするとき, 「 b は a より R の意味で同値である」ことを, $a \sim_R b$ と書く.

集合 X の要素と R の意味で同値である要素の集合は**同値類**という. これを $[x]_R$ と書き, 次のように定義する.

$$[x]_R = \{ y \mid x, y \in X, y \sim_R x \}$$

集合 X における同値関係 R による同値類の集合を X/R と書き, 次のように定義する.

$$X/R = \{ [x]_R \mid x \in X \}$$

ここで, 集合を作るとき, 要素が重複する場合は捨てられることを覚えておこう.