－ 離散数学･補足資料① －

# 記号論理

2012.4 徳久雅人

## 1 記号論理の導入

考えた事, 見た事, 聞いた事などを言葉で言い表すことがある. この述べたことを**言明**という. たとえば,「授業の単位をしっかり取ると決意した。」,「桜が咲いていた。」,「 2011 年 3 月に東日本大地震が起きた。」などである.

言明には, 真実であること, 誤りであること, どちらともいえないことがある. 真実であることを, **真**または **T** と書く. 誤りであることを, **偽**または **F** と書く. **T** は true, **F** は false の頭文字である. これら,「真, 偽」または「 **T**, **F** 」を**真理値**( truth value )という[*1] . たとえば, 小学生の算数において,「1＋2＝3である」という言明は真であり,「1＋3＝5である」という言明は偽である. しかし,「明日は強い風が吹くかもしれない。」という言明は, 真とも偽とも明確に言うことができない.

**論理**では, 言明が真であるか偽であるかを扱う. **記号論理**では, 言明を記号で表して論理を扱う. 記号論理には, 幾つか種類があるが, 離散数学の本授業では, **命題論理**と**述語論理**を扱う.

記号論理を利用する場面は非常に多い. 本授業では, 記号論理の後に, 集合論とグラフ理論を学ぶのだが, 記号論理を**条件を記述するための道具**として利用する. たとえば,「 $x + y = 5$ , となる自然数 $x, y$ の組みを集めたもの」といえば,「(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)」である. ここでデータを集める条件を記述するために記号論理が利用される. 一方, 幾つかの言明が与えられた際, 新たな言明の真偽を求めることがある. これを**推論**という. 推論に関しては, 後半で説明する.

## 2 命題論理

### 2.1 命題

明確に真理値を与えることのできる言明を**命題**という. 命題を記号で表し, その記号により真と偽を扱うことを命題論理という.

例 1 命題を記号で表した例

$\boldsymbol{P}$ = “2は偶数である”

$\boldsymbol{Q}$ = “鳥取大学が鳥取県に有る”

$\boldsymbol{R}$ = “ 1 ＞ 3 ”

$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ は命題であり, いずれも真理値が明確に決まっている. $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ は真, $\boldsymbol{R}$ は偽である. 真と偽の明確な言明を命題というし, この例のように記号 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ のことも命題という. なお, 命題の記号は, 大文字で書くことがあれば, 小文字で書くこともある.

### 2.2 論理式

$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ という命題は最も基本的(primitive)な**論理式**である. これを**基本論理式**と呼ぶ. 論理式

*1 **真偽値**, **論理値**ともいう.

と論理式を**命題結合記号**[*2] で結合したものも論理式である[*3]．主な命題結合記号を表 1 に示す．

結合の優先順位は，強いものから弱いものへと降順で並べると，「 $\neg$ ， $\wedge$ ， $\vee$ ， $\rightarrow$ ， $\leftrightarrow$ 」である．結合の優先順位を明確にするために括弧を用いて構わない．たとえば，「 $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}$ 」は，「 $\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})$」と同じである．

表 1 主な命題結合記号とその意味

| 記号 | 意味 |
|---|---|
| $\neg$ | 否定(not)という． 1 つの論理式に係る．係り先の論理式が真であるならば，否定は偽となり，そうでなければ真となる． |
| $\wedge$ | 論理積(and)という．「かつ」と読むこともある． 2 つの論理式を結合する．結合される論理式が両方とも真であるならば，論理積は真となり，そうでなければ偽となる． |
| $\vee$ | 論理和(or)という．「または」と読むこともある． 2 つの論理式を結合する．結合される論理式が両方とも偽であるならば，論理和は偽となり，そうでなければ真となる． |
| $\rightarrow$ （または $\Rightarrow$ ） | 含意(imply)という．「ならば」と読むこともある． 2 つの論理式を結合する． $\boldsymbol{P}\rightarrow\boldsymbol{Q}$ のように書き， $\rightarrow$ の左の論理式 $\boldsymbol{P}$ を前提（または仮定）と呼び， $\rightarrow$ の右の論理式 $\boldsymbol{Q}$ を結論（または帰結）と呼ぶ．前提が真であり結論が偽ならば，含意は偽となり，そうでなければ真となる． |
| $\leftrightarrow$ （または $\Leftrightarrow$ ） | 同値(equivalent)という．「論理的に等しい」あるいは単に「等しい」と読むこともある． 2 つの論理式を結合する．結合される論理式が同じ真理値ならば，同値は真となり，そうでなければ偽となる． |
| $\oplus$ | 排他的論理和(exclusive or)という．どちらか一方という意味，すなわち，「不一致」という意味である． 2 つの論理式を結合する．結合される論理式が異なる真理値であるならば真となり，同じ真理値であるならば偽となる． |

論理式の真理値は，言葉で説明してもわかりにくい．そこで，**真理値表**が使われる．

表 2 真理値表

(a) 否定

| $\boldsymbol{P}$ | $\neg\boldsymbol{P}$ |
|---|---|
| **F** | **T** |
| **T** | **F** |

(b) 論理積

| $\boldsymbol{P}$ | $\boldsymbol{Q}$ | $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$ |
|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** |
| **F** | **T** | **F** |
| **T** | **F** | **F** |
| **T** | **T** | **T** |

(c) 論理和

| $\boldsymbol{P}$ | $\boldsymbol{Q}$ | $\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ |
|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** |
| **F** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **T** |
| **T** | **T** | **T** |

(d) 含意

| $\boldsymbol{P}$ | $\boldsymbol{Q}$ | $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ |
|---|---|---|
| **F** | **F** | **T** |
| **F** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **F** |
| **T** | **T** | **T** |

(e) 同値

| $\boldsymbol{P}$ | $\boldsymbol{Q}$ | $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ |
|---|---|---|
| **F** | **F** | **T** |
| **F** | **T** | **F** |
| **T** | **F** | **F** |
| **T** | **T** | **T** |

(f) 排他的論理和

| $\boldsymbol{P}$ | $\boldsymbol{Q}$ | $\boldsymbol{P} \oplus \boldsymbol{Q}$ |
|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** |
| **F** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **T** |
| **T** | **T** | **F** |

*2　**論理演算子**ともいう．

*3　厳密には，「命題 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R},\ldots$ は論理式である．」，「 $\boldsymbol{P}$ が論理式であるとき， $\neg\boldsymbol{P}$ も論理式である．」，「 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ が論理式であるとき， $\boldsymbol{P}\rightarrow\boldsymbol{Q}$ も論理式である．」という定義が根本にある．論理積と論理和は，否定と含意の組み合わせで表されるので，定義には含まれない．

## 2.3 同値な論理式

論理式は,「 $\wedge$ , $\vee$ , $\neg$ 」のみ, または,「 $\neg$ , $\rightarrow$ 」のみで書くことができる. たとえば,「 $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ 」は「 $\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ 」である.

例 2 2 つの論理式「 $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ 」と「 $\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ 」が論理的に等しいこと, すわなち, $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ の真偽に依らず「$(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$」が常に真であることを, 真理値表で確認しよう.

表 3 含意の真理値表

| $\boldsymbol{P}$ | $\boldsymbol{Q}$ | $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ | $\neg\boldsymbol{P}$ | $\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ | $(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **F** | **F** | **F** | **T** |
| **T** | **T** | **T** | **F** | **T** | **T** |

よく使われる同値な関係を表 4 にまとめる.

表 4 論理式の同値な関係

| # | 関 係 | | 性 質 |
|---|---|---|---|
| 1 | $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$, | $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P})$ | 交換律 |
| 2 | $(\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R})) \Leftrightarrow ((\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{R}))$, | $(\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})) \Leftrightarrow ((\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \vee (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R}))$ | 分配律 |
| 3 | $(\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$ | $(\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$ | 吸収律 |
| 4 | $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{P} \vee \ldots \vee \boldsymbol{P}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$ | $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{P} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{P}) \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$ | ベキ等律 |
| 5 | $((\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{R}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}))$, | $((\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{R}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{P} \wedge (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}))$ | 結合律 |
| 6 | $\neg(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q})$, | $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P} \vee \neg\boldsymbol{Q})$ | ド・モルガンの法則 |
| 7 | $\neg\neg\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \boldsymbol{P}$ | | 二重否定 |
| 8 | $(\boldsymbol{P} \vee \neg\boldsymbol{P}) \Leftrightarrow \mathbf{T}$ | | 排中律 |
| 9 | $(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{P}) \Leftrightarrow \mathbf{F}$ | | 矛盾律 |
| 10 | $(\mathbf{T} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \mathbf{T}$, $(\mathbf{F} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ | $(\mathbf{T} \wedge \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$, $(\mathbf{F} \wedge \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \mathbf{F}$ | 真偽の性質 |
| 11 | $(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q})$ | | 含意の除去 |
| 12 | $(\mathbf{T} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \boldsymbol{Q}$, $(\mathbf{F} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow \mathbf{T}$, | $(\boldsymbol{P} \rightarrow \mathbf{T}) \Leftrightarrow \mathbf{T}$, $(\boldsymbol{P} \rightarrow \mathbf{F}) \Leftrightarrow \neg\boldsymbol{P}$ | 含意の性質 |
| 13 | $(\boldsymbol{P} \rightarrow \neg\boldsymbol{P}) \Leftrightarrow \neg\boldsymbol{P}$ | | 背理法 |
| 14 | $(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{Q} \rightarrow \neg\boldsymbol{P})$ | | 対偶 |
| 15 | $(\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow ((\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{P})) \Leftrightarrow ((\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \vee (\neg\boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q}))$ | | 同値の除去 |
| 16 | $(\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P} \leftrightarrow \neg\boldsymbol{Q})$, | $\neg(\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}) \Leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P} \leftrightarrow \neg\boldsymbol{Q})$ | 同値の性質 |

※ $\Leftrightarrow$ の左右の論理式は論理的に等しい.

問 1 2 つの論理式「 $\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}$ 」と「$(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{P})$」が論理的に等しいことを真理値表で確認せよ.

問 2 2 つの論理式「 $\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}$ 」と「 $\neg(\boldsymbol{P} \rightarrow \neg\boldsymbol{Q})$」が論理的に等しいことを真理値表で確認せよ.

## 2.4 同値変形

同値な関係を用いて，論理式を書き換えることができる．これを同値変形という．

例 3

(1) $(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \to \mathbf{F}$

$\leftrightarrow$ $(\neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \vee \mathbf{F})$ [∵ 表 4 の#11，含意の除去より]

$\leftrightarrow$ $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q})$ [∵ 表 4 の#10，真偽の性質より]

$\leftrightarrow$ $\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ [∵ 表 4 の#6，ドモルガンの法則より]

$\leftrightarrow$ $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ [∵ 表 4 の#11，含意の除去より]

$\leftrightarrow$ $\neg \boldsymbol{Q} \to \neg \boldsymbol{P}$ [∵ 表 4 の#14，対偶より]

(2) $(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R})$

$\leftrightarrow$ $\neg(\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \vee (\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})$ [∵ 含意の除去より]

$\leftrightarrow$ $(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \vee (\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R})$ [∵ ド・モルガンの法則より ]

$\leftrightarrow$ $((\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \vee \neg \boldsymbol{Q}) \vee \boldsymbol{R}$ [∵ 結合律より]

$\leftrightarrow$ $\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}$ [∵ 吸収律より]

$\leftrightarrow$ $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$ [∵ 含意の除去より]

(3) $\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{P})$

$\leftrightarrow \neg \boldsymbol{P} \vee (\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$

$\leftrightarrow \neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow \mathbf{T} \vee \neg \boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow \mathbf{T}$

「同値 $\leftrightarrow$ 」と「含意 $\to$ 」を使用しない論理式を求めることがある．たとえば，例 3 の(1)は，「 $\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}$ 」まで求めたもの，(2)は「 $\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}$ 」まで求めたものである．また，(3)のように，変形の結果，真理値のみになることがある．

問 3　まず，同値変形により，同値と含意を使用しない論理式を求めよ．次に，真理値表を作成し，得られた論理式と元の論理式が同値であることを確認せよ．

(1) $\neg \boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{P} \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \neg \boldsymbol{P}) \vee \neg \boldsymbol{Q})$

(2) $\neg(\boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{Q}) \to \neg \boldsymbol{P}$

(3) $(\boldsymbol{P} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})$

(4) $\neg(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$

## 2.5 標準形

同値変形をすると，幾通りも同値な論理式が得られる．そこで，標準形を目指して書き換えることがある．標準形には次の 2 つがある．ここで $P_{ij}$ は基本論理式もしくは否定つき基本論理式である．

- **連言標準形（conjunctive normal form）**

  連言標準形の論理式 $C$ は次の構造である．

  $C = C_1 \land C_2 \land \ldots \land C_n$　($n \geq 1$)

  $C_i = P_{i1} \lor P_{i2} \lor \ldots \lor P_{im}$　($m \geq 1$)

- **選言標準形（disjunctive normal form）**

  選言標準形の論理式 $D$ は次の構造である．

  $D = D_1 \lor D_2 \lor \ldots \lor D_{\mathrm{n}}$ ($n \geq 1$)

  $D_i = P_{i1} \land P_{i2} \land \ldots \land P_{i\mathrm{m}}$　($m \geq 1$)

例 4

(1) $(\boldsymbol{P} \lor \neg \boldsymbol{Q} \lor \boldsymbol{R}) \land (\neg \boldsymbol{Q} \lor \boldsymbol{R})$ は連言標準形である．

(2) $(\boldsymbol{P} \land \boldsymbol{Q}) \lor (\neg \boldsymbol{P} \land \boldsymbol{Q} \land \neg \boldsymbol{R})$ は選言標準形である．

連言標準形もしくは選言標準形に変形する手順は，次のとおりである．

(1) 含意「 $\to$ 」や同値「 $\leftrightarrow$ 」の記号を除去する．
(2) 否定「 $\neg$ 」の記号が基本論理式の直前に来るように変形する．変形には，ド・モルガンの法則や二重否定を用いる．
(3) 分配律に基づき，目的とする標準形に近づける．

例 5

例 3 の変形の途中を変えると，連言標準形を求めることができる．

$(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R})$

$\leftrightarrow \neg(\neg \boldsymbol{P} \lor \boldsymbol{Q}) \lor (\neg \boldsymbol{Q} \lor \boldsymbol{R})$　　[∵ 含意の除去より]

$\leftrightarrow (\boldsymbol{P} \land \neg \boldsymbol{Q}) \lor (\neg \boldsymbol{Q} \lor \boldsymbol{R})$　　[∵ ド・モルガンの法則より ]

$\leftrightarrow ((\boldsymbol{P} \land \neg \boldsymbol{Q}) \lor \neg \boldsymbol{Q}) \lor \boldsymbol{R}$　　[∵ 結合律より]

$\leftrightarrow \neg \boldsymbol{Q} \lor \boldsymbol{R}$　　[∵ 吸収律より]

問 4

(1) $(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \land (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})$ の選言標準形を求めよ．

(2) $((\boldsymbol{P} \lor \boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{R}) \land ((\neg \boldsymbol{P} \land \boldsymbol{Q}) \to \neg \boldsymbol{R})$ の連言標準形を求めよ．

## 問の答え

問 1

| $P$ | $Q$ | $P \leftrightarrow Q$ | $P \to Q$ | $Q \to P$ | $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **F** | **T** | **F** | **F** |
| **T** | **F** | **F** | **F** | **T** | **F** |
| **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** |

問 2

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \to \neg Q$ | $\neg(P \to \neg Q)$ |
|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** | **T** | **F** |
| **F** | **T** | **F** | **T** | **F** |
| **T** | **F** | **F** | **T** | **F** |
| **T** | **T** | **T** | **F** | **T** |

問 3

(1) **T**　(2) $\neg P \vee \neg Q$　(3) $\neg P \vee \neg Q \vee R$　(4) $P$

(4)の真理値表. 他は省略

| $P$ | $Q$ | $P \wedge \neg Q$ | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | $\neg P$ | $\neg(P \wedge \neg Q) \to \neg P$ | $\neg P \vee \neg Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **F** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **T** | **F** | **F** | **T** | **T** |
| **T** | **T** | **F** | **T** | **F** | **F** | **F** |

問 4

(1) $\neg P \vee (\neg P \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$ または $\neg P \vee (Q \wedge R)$

(2) $(\neg P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R)$

# 3 述語論理

## 3.1 命題関数

言明の中に不確定なものを含めることがある．不確定なものを変数で表すことにする．変数付きの言明を記号で表すために**命題関数**を用いる．

例 6

(1) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は偶数である”

(2) $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は人間である”

(3) $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ = “ $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ ”

命題関数は，引数に何らかの値が代入されと，真偽が問えるようになる．たとえば，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の真偽は不明だが，引数の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のそれぞれに 10 と 20 が代入される，すなわち，$\boldsymbol{R}(10, 20)$ となると，明らかに真である．

## 3.2 命題関数から述語論理へ

命題関数は，**述語**とも呼ばれる．命題関数は，引数に代入される値に依存して，真偽が解釈される．「具体的な値が代入されていなくても，代入される値を何らかの方法で定めることで真偽を解釈しよう」として考え出されたのが**述語論理**である．

述語論理は，命題関数に**限定作用素**を用いた論理である．限定作用素には，**全称作用素** $\forall$，および，**存在作用素** $\exists$ の 2 つがある．

- 全称作用素．$\forall$： 全ての範囲の値を想定する．
- 存在作用素．$\exists$： 何か適切な値を想定する．

限定作用素は，命題関数の前に書く．限定作用素の付いた命題関数は，命題と言える．全称作用素付きの場合は**全称命題**，存在作用素付きの場合は**存在命題**といわれる．

例 7 限定作用素の意味は次のとおりである．

(1) $\exists\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ とは，「 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ が真となる $\boldsymbol{x}$ が存在する」や「ある $\boldsymbol{x}$ において $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$が真となる」という言明に読み替える．なお，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は偶数である” とするとき，$\exists\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ は真と言える．

(2) $\forall\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ とは，「全ての $\boldsymbol{x}$ において $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$が真となる」という言明に読み替える．$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は偶数である” とするとき，$\forall\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ は偽と言える．

たとえば，$\boldsymbol{x} = 2$ を想定すると $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$が真になる．他に $\boldsymbol{x} = 4$ でも 6 でも良い．このように命題関数が真になるような $\boldsymbol{x}$ の値が 1 つ以上想定できるとき，存在作用素の付いた命題関数は真であるといえる．逆に，(2)は $\boldsymbol{x} = 3$ を想定すると偽となる．つまり，偽になるような $\boldsymbol{x}$ が 1 つでも存在するとき，全称命題は偽となる．

引数が 2 個以上あるときは，限定作用素の順序に注意が必要である．

例 8　$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ = “ $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ ” とするとき，以下の命題の真偽を述べよ．ただし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は実数とする．

（1）$\exists \boldsymbol{x}(\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$　（答え）真である．

（2）$\exists \boldsymbol{x}(\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$　（答え）偽である．

（3）$\forall \boldsymbol{x}(\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$　（答え）真である．

（4）$\forall \boldsymbol{x}(\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$　（答え）偽である．

(2)では，先に $\boldsymbol{x}$ が何か想定されたところで全ての $\boldsymbol{y}$ について $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の真偽を考える．先に定めた $\boldsymbol{x}$ より小さい範囲で $\boldsymbol{y}$ が想定されうるため，偽となる．逆に，(3)ではどんな値が $\boldsymbol{x}$ に代入されようとも何らかの適切な値を $\boldsymbol{y}$ に代入することができるので，真となる．

(1) は 1 つでも真となる $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が存在すれば真となる．(4) は 1 つでも偽となる $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が存在すれば偽となる．

なお，例 8 ではあえて括弧を書いている．下記の問 5 のように省略してもよい．

問 5 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ = “ $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \geq \boldsymbol{z}$ ”とするとき，次の命題の真偽を述べよ．ただし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は実数とする．

（1）$\exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 1)$　（2）$\exists \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 1)$　（3）$\forall \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 1)$　（4）$\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 1)$

（5）$\exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0)$　（6）$\exists \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0)$　（7）$\forall \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0)$　（8）$\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, 0)$

## 3.3 述語論理での命題結合記号

### 3.3.1 限定作用素による束縛

述語論理でも，命題論理と同様に，命題結合記号を使うことができる．論理式が複雑になると，限定作用素の解釈の仕方が分かりにくくなる．まずは限定作用素の係り方を理解しておこう．

限定作用素は，直後の命題関数に係る．括弧を使うと，限定作用素の係る先が変更できる．限定作用素は直後の命題関数に係るので，変数の値が限定されるのはその範囲だけである．限定作用素の係る先の変数は，**束縛**されているという．限定作用素の影響を受けない変数は**自由**であるという．

例 9 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は偶数である”，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は素数である” とする．

（1）$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$　ある $\boldsymbol{x}$ は偶数であり $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$である．真偽は決まらない(命題ではない)が，論理式（述語）である．

（2）$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$　ある $\boldsymbol{x}$ は偶数であり，ある $\boldsymbol{x}$ は素数である．

（3）$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$　ある $\boldsymbol{x}$ は偶数であり，ある $\boldsymbol{y}$ は素数である．

（4）$\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}))$　ある $\boldsymbol{x}$ は，偶数であり，かつ，素数である．

※ (1)は，1 つめの $\boldsymbol{x}$ は束縛されているが，2 つめの $\boldsymbol{x}$ については自由である．$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ のように，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ については定数 $\boldsymbol{a}$ が代入された論理式と解釈してよい．

※ (2)は，1 つめの $\boldsymbol{x}$ と 2 つめの $\boldsymbol{x}$ は別々に束縛されているので，$\boldsymbol{x}$ には異なる値が代入された論理式と解釈してもよい．

※ (3)は，(2)と論理的に等しい．なので，(2)は，(3)のように異なる変数で書くほうが分かりやすい．

※ (4)は，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$の $\boldsymbol{x}$ には同じ値が代入されることが想定されており，2 つの $\boldsymbol{x}$ は 1 つの限定作用素により束縛されている．真となるには，$\boldsymbol{x} = 2$ としか解釈できない．

※ (2)と(4)は論理的に等しくはない．(1)は，(2),(3),(4)のいずれとも論理的に等しくはない．

### 3.3.2 限定作用素に関する同値な関係

同値な関係を以下にまとめる．

表 5 限定作用素に関する同値な関係

| # | 関係 | 性質 |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ | 否定 |
| 2 | $\neg(\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ | |
| 3 | $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \neg\exists \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ | |
| 4 | $\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \neg\forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ | |
| 5 | $\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{y}\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ | 交換 |
| 6 | $\exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{y}\exists \boldsymbol{x}\mathrm{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ | |
| 7 | $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))$ | 分配 |
| 8 | $\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))$ | |
| 9 | $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q})$ | 命題を含む |
| 10 | $\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q})$ | |
| 11 | $\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q})$ | |
| 12 | $\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q})$ | |

（確認）1 を確認しよう．

$\neg(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{T}$ のとき，$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{F}$ である．

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{F}$ となるような $\boldsymbol{x}$ が存在する．

$\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{T}$ となるような $\boldsymbol{x}$ が存在する．

$\exists \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{T}$ である．

※ $\neg(\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{F}$ のときも同様．

分配については，次の論理式は成り立つ．しかし，同値な関係ではないことに注意しよう．

$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))$

$\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})) \Rightarrow \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$

問 6　$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は偶数である ” ，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})$ = “ $\boldsymbol{x}$ は 4 の倍数である”，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ = “ $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ ” とする．ここで，ただし，変数 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は，1 以上の整数とする．

(i) 次の論理式の真偽を述べよ．

（1） $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$　　（2） $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}))$

（3） $\forall \boldsymbol{z}\exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$　　（4） $\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}) \to \exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{R}(2, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}))$

(ii) 次の論理式が真になるための条件を述べよ．（たとえば，$\boldsymbol{z}$ = ???? という形式を述べよ）

（5） $\exists \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

## 3.4 述語論理の標準形

### 3.4.1 冠頭標準形

述語論理式の標準形では，限定作用素の並びにより，次の2つの形式がある．

- 全称閉形（universal closure）... $\forall \boldsymbol{x}_1 \forall \boldsymbol{x}_2 \ldots \forall \boldsymbol{x}_n\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$
- 存在閉形（existential closure）... $\exists \boldsymbol{x}_1 \exists \boldsymbol{x}_2 \ldots \exists \boldsymbol{x}_n\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$

※ $\boldsymbol{P}(\cdot)$は命題関数である．

さらに，述語論理式では，たとえば，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \to \exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y})$ のように，限定作用素が式の途中に存在することがある．途中に限定作用素が存在しないように変形したものは次の2つの形式がある．

- 冠頭連言標準形 ... $\mathrm{Q}\boldsymbol{x}_1\mathrm{Q}\boldsymbol{x}_2\ldots\mathrm{Q}\boldsymbol{x}_n\ \boldsymbol{C}$　（ここで，$\boldsymbol{C}$ は連言標準形）
- 冠頭選言標準形 ... $\mathrm{Q}\boldsymbol{x}_1\mathrm{Q}\boldsymbol{x}_2\ldots\mathrm{Q}\boldsymbol{x}_n\ \boldsymbol{D}$　（ここで，$\boldsymbol{D}$ は選言標準形）

ここで，Q は全称記号∀または存在記号∃である．混ざっていても構わない．

冠頭標準形に変形する手順は，次のとおりである．

(1) 係り先のない限定作用素は削除する．

例．$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z}))$ は $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z})$ とする．$\boldsymbol{x}$ 除去

(2) 変数名が異なるように付け替える．

例．$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ のとき，2 つめの $\boldsymbol{y}$ は紛らわしいので別の名前に付け替えて，$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \exists \boldsymbol{u}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$ とする．

(3)「$\to$ の除去」，「$\leftrightarrow$ の除去」を行う．

(4)「$\neg$」を限定作用素より内側（右側）に移す．次の同値な式が役に立つ．

$\neg\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{P})$

$\neg\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\neg \boldsymbol{P})$

(5) 限定作用素を左に移す．次の同値な式が役に立つ．ただし，$\boldsymbol{Q}$ は変数 $\boldsymbol{x}$ を持たないものとする．

$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q})$

$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q})$

$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q})$

$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{Q})$

$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))$

$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}))$

(6) 以降は，連言標準形・選言標準形の変形手順と同じ．

例 10

次の論理式を冠頭連言標準形に変形しよう．

$\forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}(\exists \boldsymbol{z}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \wedge (\exists \boldsymbol{u}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \to \exists \boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})))$

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}(\exists \boldsymbol{z}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \wedge (\neg\exists \boldsymbol{u}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \vee \exists \boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})))$　[ →の除去]

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}(\exists \boldsymbol{z}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \wedge (\forall \boldsymbol{u}\neg\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \vee \exists \boldsymbol{v}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})))$　[ ¬ を内側へ移す]

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\exists \boldsymbol{z}\forall \boldsymbol{u}\exists \boldsymbol{v}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \wedge (\neg\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{v})))$　[限定作用素を外側へ移す]

### 3.4.2 Skolem 標準形

***Skolem* 標準形**は，存在記号の除去された冠頭連言標準形である．存在記号を除去するために，***Skolem* 関数**を導入する．存在記号の付与された変数は，それ以前に束縛された変数に依存しているので，その依存関係を，Skolem 関数で表現する．Skolem 関数が具体的にどのような写像を持つのかを直ちに明示する必要は無い．

例 11　たとえば，次の論理式は，「どんな $\boldsymbol{x}$ が設定されても，適切に $\boldsymbol{y}$ を設定することで，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が成立すること」を表している．

$$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

つまり，$\boldsymbol{y}$ は，$\boldsymbol{x}$ に依存して設定する必要がある．次の Skolem 関数を導入する．

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

この関数を，元の論理式に代入することができ，次のように論理式を書き換える．

$$\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \quad \text{ただし } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \text{は Skolem 関数}$$

例 12（複数の変数に依存する場合）

次の論理式を Skolem 標準形に変形しよう．

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{z} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

この場合，$\boldsymbol{z}$ は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に依存するので，Skolem 関数は，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる．したがって，この論理式の Skolem 標準形は次のようになる．

$$\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \quad \text{ただし } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{は Skolem 関数}$$

例 13（変数に依存しない場合）

次の論理式を Skolem 標準形に変形しよう．

$$\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

この場合，定数 $\boldsymbol{a}$（代入可能なものは複数あるが，ここでは定数と呼ぶことにする）を用いて，この論理式の Skolem 標準形を次のように表す．

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) \quad \text{ただし } \boldsymbol{a} \text{ は定数}$$

Skolem 標準形に変換する手順は次のとおりである．

| |
|---|
| (1) 変数名が異なるように付け替える． |
| (2)「$\rightarrow$ の除去」，「$\leftrightarrow$ の除去」を行う． |
| (3)「$\neg$」を限定作用素より内側（右側）に移す． |
| (4) Skolem 関数を導入，および，必要に応じて定数化を行うことで，存在記号を除去する． |
| (5) 全称記号を左に移す． |
| (6) 連言標準形に変換する． |

問 7 Skolem 標準形に変形せよ．

（1）$\forall \boldsymbol{x}\{\exists \boldsymbol{y} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\}$　　（2）$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y}\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}))\}$

## 問の答え

問 5

(1) 真　(2) 偽　(3) 真　(4) 偽　(5) 真　(6) 真　(7) 真　(8) 真

問 6

(1) 真　(2) 偽　(3) 真　(4) 真　　(5) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$

問 7

(1) $\forall \boldsymbol{x}\{\exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\}$

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\{\neg\exists \boldsymbol{y}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\}$

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\{\forall \boldsymbol{y}\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\}$

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\forall \boldsymbol{y}\{\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\}$

(2) $\forall \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}))\}$

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\exists \boldsymbol{y}\{\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}))\}$

$\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}\{\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \vee \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})))\}$　　ただし $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ は Skolem 関数

# 4 論理式の真偽

## 4.1 真偽に基づく論理式の分類

論理式の真と偽の決まり方は，次の 3 通りがある．

（1） 論理式を構成する基本論理式の真偽によらず，常に真になる．

（2） 論理式を構成する基本論理式の真偽によって，真になったり，偽になったりする．

（3） 論理式を構成する基本論理式の真偽によらず，常に偽になる．

たとえば， $P \vee \neg P$ は，常に真になる． $P \wedge \neg P$ は，常に偽になる． $P \to Q$ の真偽は， $P$ と $Q$ の真偽に依存する．ここで，常に真になることを**恒真**といい，恒真となる論理式のことを**恒真論理式**，**恒真式**，あるいは，**トートロジー**という．一方，常に偽になることを**恒偽**といい，恒偽となる論理式を**恒偽式**という．

何らかの条件で真になること，すなわち，恒偽ではないことを，**充足可能**という．充足可能となる論理式を**充足可能式**という．さらに，恒真式については**充当式**ともいう．逆に，恒偽のことを**充足不能**といい，恒偽式のことを**充足不能式**，あるいは，**矛盾式**ともいう．

<table>
<tr><td>常に真の論理式<br>恒真式，トートロジー</td><td>真偽が変わる論理式</td><td rowspan="2">常に偽の論理式<br>恒偽式<br>充足不能式，矛盾式</td></tr>
<tr><td colspan="2">充足可能式</td></tr>
</table>

## 4.2 決定問題

与えられた論理式が，充足可能であるか，充足不能であるかを求めることを**決定問題**という．

本資料で説明してきた範囲でいうと，決定問題の解決方法の1つめは，同値変形である．与えられた論理式を変形し，吸収律により式を簡単化したり，排中律や矛盾律で **T** や **F** を部分的に求めることを繰り返し，最終的に **T** のみの論理式， **F** のみの論理式，基本論理式がどうしても残る論理式のいずれになるかを求めることで解決する．

解決方法の 2 つめは，「真理値表を作成すること」である．真理値表を作成し，与えられた論理式の真偽が全て真ならば恒真，全て偽ならば恒偽，両方あるならば，恒真ではない充足可能という判定をする．しかし，与えられた論理式を構成する基本論理式の数を $n$ 個とすると， $2^n$ 行の表を作成しなければならないため，複雑な論理式の場合には手間がかかる．

そこで，**意味の木**を用いる解決方法がある．意味の木は，木構造である．木構造とは，ルートノードという出発点から，複数に分岐して線が出ており，そのそれぞれの線の先にノードができ，さらに，各ノードから分岐して線が出てノードができるということを繰り返してできた構造である．ルートノードには，与えられた論理式を配置する．その式を構成する基本論理式の1つに対して， **T** を想定する線と **F** を想定する線に分け，それぞれ **T** や **F** と想定した結果の論理式を線の先のノードに配置する．ここで， **T** を想定する線には，その基本論理式を書き， **F** を想定する線には，否定を付与した基本論理式を書く．論理式が徐々に簡単になり，最終的に末端のノードは， **T** または **F** のノードだけになる．全ての末端のノードが **T** の場合，与えられた論理式は恒真式であり，全ての末端のノードが **F** の場合，与えられた論理式は恒偽式であるといえる．

例 14 意味の木を用いて, 次の論理式が恒真, 恒偽, どちらでもないかを求めよう.

(1) $\neg \boldsymbol{P} \vee (\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$

$$\neg \boldsymbol{P} \vee (\neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$$

$\boldsymbol{P}$ 　　　　　　　　$\neg \boldsymbol{P}$

$\mathbf{F} \vee (\neg \boldsymbol{Q} \vee \mathbf{T})$ 　　　　$\mathbf{T} \vee (\neg \boldsymbol{Q} \vee \mathbf{F})$

$\leftrightarrow \mathbf{T}$ 　　　　$\leftrightarrow \mathbf{T}$

ゆえに, 与式は恒真である.

(2) $(\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R})) \wedge (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R}$

$$(\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R})) \wedge (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R}$$
$$\leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) \wedge (\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \neg \boldsymbol{R}$$

$\boldsymbol{R}$ 　　　　　　　　$\neg \boldsymbol{R}$

$(\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{R}) \wedge (\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \mathbf{F}$ 　　$(\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q} \vee \mathbf{F}) \wedge (\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \mathbf{T}$

$\leftrightarrow \mathbf{F}$ 　　　　$\leftrightarrow (\neg \boldsymbol{P} \vee \neg \boldsymbol{Q}) \wedge (\neg \boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P}$

$\boldsymbol{P}$ 　　　　　　　　$\neg \boldsymbol{P}$

$(\mathbf{F} \vee \neg \boldsymbol{Q}) \wedge (\mathbf{F} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge \mathbf{T}$ 　　　　$(\mathbf{T} \vee \neg \boldsymbol{Q}) \wedge (\mathbf{T} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge \mathbf{F}$

$\leftrightarrow \neg \boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{Q}$ 　　　　$\leftrightarrow$ 　　$\mathbf{F}$

$\boldsymbol{Q}$ 　　　　$\neg \boldsymbol{Q}$

$\mathbf{F}$ 　　　　$\mathbf{F}$

ゆえに, 与式は恒偽である.

問 8　次の論理式について, 恒真か, 恒偽か, いずれでもないかを求めよ.

(1) $\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{P})$

(2) $(((\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{Q})) \to \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{R})$

(3) $((\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})) \to \boldsymbol{R}$

(4) $((\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R})) \to (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})$

※ 意味の木で求めた後, 同値変形, 真理値表でも求めてみよう.

## 4.3 論理的帰結

### 4.3.1 論理的帰結の定義

幾つかの事実の組み合わせから，1つの結論を導くことがある．各事実を表す論理式が $\boldsymbol{F_i}$ であり，結論である論理式が $\boldsymbol{G}$ として導かれることは，次のとおり論理式で記述できる．

$$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$$

論理式 $\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n}$ が真となるとき $\boldsymbol{G}$ も真となることを表している．このとき，「$\boldsymbol{G}$ は，$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの**論理的帰結**である」という．

> 定理　論理式 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ および $\boldsymbol{G}$ について，
>
> $$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$$
>
> が恒真であるとき，$\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの論理的帰結である．
>
> 逆に，$\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの論理的帰結であるとき，
>
> $$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$$
>
> は恒真である．

（証明）

まず，$\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの論理的帰結であるとする．論理的帰結の定義より，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n}$ が真となるとき $\boldsymbol{G}$ も真となる．ゆえに，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$ は $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ であり真となる．一方，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n}$ が偽となるとき，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$ は $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{T}$ であり真となる．ゆえに，$\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの論理的帰結であるとき $\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$ は恒真である．

逆に，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$ が恒真であるとする．$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n}$ が真であるとき，$\mathbf{T} \rightarrow \boldsymbol{G}$ であるので，仮定より，$\boldsymbol{G}$ も真である．論理的帰結とは「$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n}$ が真であるとき，$\boldsymbol{G}$ も真となること」を指しているので，$\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの論理的帰結である．

（証明終り）

### 4.3.2 論理的帰結の利用方法

$\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの論理的帰結であるとき，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$ は恒真なので，その否定は恒偽である．

$$\neg(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}) \leftrightarrow \mathbf{F}$$

含意の除去とドモルガンの法則より，同値変形すると

$$\neg(\neg(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n}) \vee \boldsymbol{G}) \leftrightarrow \mathbf{F}$$

$$(\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \wedge \neg\boldsymbol{G}) \leftrightarrow \mathbf{F}$$

ゆえに，$\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \ldots, \boldsymbol{F_n}$ からの論理的帰結であることを証明するには，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \rightarrow \boldsymbol{G}$ が恒真であることを証明する他に，$\boldsymbol{F}_1 \wedge \boldsymbol{F}_2 \wedge \boldsymbol{F}_3 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{F_n} \wedge \neg\boldsymbol{G}$ が恒偽であることを証明するという方法がある．

問 9 （1）$\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{P}$ が真であるとき，$\boldsymbol{Q}$ がそれらからの論理的帰結であることを証明せよ．

（2）$\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R}$ が真であるとき，$\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{R}$ がそれらからの論理的帰結であることを証明せよ．

## 5 演繹

前提から結論を導くことを**演繹**という．演繹には幾つかの種類がある．そのうち，命題 $\boldsymbol{P}$ が真であり，$\boldsymbol{P}\to\boldsymbol{Q}$ も真であるという前提から，$\boldsymbol{Q}$ が真であるという結論を出すことを，***modus ponens***（**モーダス・フォーネンス**）という．

例 15

言明で考えてみる:

“100円を入れる” ということが真であるとする．

“100円をいれるならば，ジュースが出る”ということも真であるとする．

この2つから推論されることは，“ジュースが出る”ということである．

基本論理式を書いてみる:

$\boldsymbol{P}$ = “100円を入れる”, $\boldsymbol{Q}$ = “ジュースが出る”, $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ = “ 100 円を入れるとジュースが出る”とする．

$\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ が真であるとすると，$\boldsymbol{Q}$ が推論される．

すなわち，“ジュースが出る”と推論される．

### 5.1 記法

演繹の記法には**推論図**を用いる記法がある．

推論図を用いて，モーダス・フォーネンスを記述すると次のようになる．

$$\frac{\boldsymbol{P} \qquad \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{Q}}$$

横線の上段には，前提となる論理式を書き，下段には結論を書く．

例 16 演繹の様子を記述しよう．

(1)「 $\boldsymbol{A}$ 」と「 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ 」を前提とすると「 $\boldsymbol{B}$ 」という結論が得られる．

$$\frac{\boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}}$$

(2)「 $\boldsymbol{A}$ 」と「 $\boldsymbol{A}\to(\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C})$」を前提とすると「 $\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}$ 」という結論が得られる．

$$\frac{\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{A} \to (\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C})}{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{C}}$$

## 5.2 過程の記述

ある論理式が成り立つことを前提として，別の論理式が成り立つことを示すことを演繹と呼んだ．さらに，ある演繹が成り立つことを前提として，別の演繹の成り立つことを示すことも演繹という．

例 17「 $\boldsymbol{A}$ 」と「 $\boldsymbol{A\to B}$ 」と「 $\boldsymbol{B\to C}$ 」を前提とすると「 $\boldsymbol{C}$ 」という結論が得られるという過程を記述しよう．

$$\dfrac{\dfrac{\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{A\to B}}{\boldsymbol{B}} \qquad \boldsymbol{B\to C}}{\boldsymbol{C}}$$

## 5.3 演繹を用いた証明

そもそも，$\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ とは，$\boldsymbol{P}$ を前提として $\boldsymbol{Q}$ を結論とするという命題である．

「 $\boldsymbol{P}$ およびある論理式 $\boldsymbol{\Gamma}$ を前提とした際，$\boldsymbol{Q}$ が結論として導かれた」(a)のであれば，「ある論理式 $\boldsymbol{\Gamma}$ を前提とした際，$\boldsymbol{P}$ を前提として $\boldsymbol{Q}$ を結論とすることを導いた」(b)ということである．すなわち，「ある論理式 $\boldsymbol{\Gamma}$ を前提とした際，$\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ が結論として導かれた」(c)ということである．

このことを推論図を用いて記述すると下記のようになる．番号は**仮説**である．最初の横線の上段と下段が表すものが(a)である． 1 という数字は $\boldsymbol{P}$ が仮説として立てられていることを表す．次の横線の上下段，および，「 $\to$ 導入 1 」が表すものが(b)という考えから $\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ を結論として導くことを表す．この推論図では，$\boldsymbol{\Gamma}$ が前提のままのこっているが，$\boldsymbol{P}$ は結論に組み込まれた（ $\boldsymbol{P}$ は前提では無くなった）．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\boldsymbol{P}} \qquad \boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{Q}}}{\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}} \ \to \text{導入 } 1$$

例 18「 $\boldsymbol{A\to B}$ 」と「 $\boldsymbol{B\to C}$ 」を前提とすると「 $\boldsymbol{A\to C}$ 」という結論が得られることを示そう．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\boldsymbol{A}} \quad \boldsymbol{A\to B}}{\boldsymbol{B}} \qquad \boldsymbol{B\to C}}{\boldsymbol{C}}}{\boldsymbol{A\to C}} \ \to \text{導入 } 1$$

この考え方をもっとすすめると，前提の無い結論が得られる．たとえば，例 18 において，「 $\boldsymbol{A\to B}$ 」と「 $\boldsymbol{B\to C}$ 」にも仮説の番号を付与し，「 $\to$ 導入」を行うと「$(\boldsymbol{A\to B})\to((\boldsymbol{B\to C})\to(\boldsymbol{A\to C}))$」が得られる．これはトートロジーである．すなわち，トートロジーの証明に推論図を使うことができる．

問 10　例 18 に追加を行い，「$(\boldsymbol{A\to B})\to((\boldsymbol{B\to C})\to(\boldsymbol{A\to C}))$」の得られることを確認せよ．この論理式がトートロジーであることを，真理値表，意味の木，同値変形の 3 通りでも確認せよ．

## 問の答え

問 8

(1) 恒真 (2) 恒真でも恒偽でもない (3) 恒真でも恒偽でもない (4) 恒真

問 9

(方針)

(1) の方針 $\boldsymbol{F_1=P\to Q}$, $\boldsymbol{F_2=P}$, $\boldsymbol{G=Q}$ として，$\boldsymbol{F_1} \wedge \boldsymbol{F_2} \wedge \neg\boldsymbol{G}$ が恒偽であることを証明する.

(2) の方針 $\boldsymbol{F_1=P\to Q}$, $\boldsymbol{F_2=Q\to R}$, $\boldsymbol{G=P\to R}$ として，$\boldsymbol{F_1} \wedge \boldsymbol{F_2} \wedge \neg\boldsymbol{G}$ が恒偽であることを証明する.

(解答)

(1) $(\boldsymbol{P\to Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow (\neg\boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow ((\neg\boldsymbol{P}\vee\boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P}) \wedge \neg\boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow ((\neg\boldsymbol{P}\wedge \boldsymbol{P}) \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P})) \wedge \neg\boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow (\mathbf{F} \vee (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P})) \wedge \neg\boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P}) \wedge \neg\boldsymbol{Q}$

$\leftrightarrow (\boldsymbol{Q} \wedge \neg\boldsymbol{Q}) \wedge \boldsymbol{P}$

$\leftrightarrow \mathbf{F} \wedge \boldsymbol{P}$

$\leftrightarrow \mathbf{F}$

$(\boldsymbol{P\to Q}) \wedge \boldsymbol{P} \wedge \neg\boldsymbol{Q}$ が恒偽である.

$\boldsymbol{Q}$ は $(\boldsymbol{P\to Q})$ と $\boldsymbol{P}$ からの論理的帰結である.

(2) $(\boldsymbol{P\to Q}) \wedge (\boldsymbol{Q\to R}) \wedge \neg(\boldsymbol{P\to R})$

$\boldsymbol{P}$

$(\mathbf{T}\to\boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q\to R}) \wedge \neg(\mathbf{T}\to\boldsymbol{R})$

$\leftrightarrow \boldsymbol{Q} \wedge (\boldsymbol{Q\to R}) \wedge \neg\boldsymbol{R}$

$\boldsymbol{Q}$

$\mathbf{T} \wedge (\mathbf{T}\to\boldsymbol{R}) \wedge \neg\boldsymbol{R}$

$\leftrightarrow \boldsymbol{R} \wedge \neg\boldsymbol{R}$

$\leftrightarrow \mathbf{F}$

$\neg\boldsymbol{Q}$

$\mathbf{F} \wedge (\mathbf{F}\to\boldsymbol{R}) \wedge \neg\boldsymbol{R}$

$\leftrightarrow \mathbf{F}$

$\neg\boldsymbol{P}$

$(\mathbf{F}\to\boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{Q\to R}) \wedge \neg(\mathbf{F}\to\boldsymbol{R})$

$\leftrightarrow \mathbf{T} \wedge (\boldsymbol{Q\to R}) \wedge \neg\mathbf{T}$

$\leftrightarrow \mathbf{F}$

意味の木より, $(\boldsymbol{P\to Q}) \wedge (\boldsymbol{Q\to R}) \wedge \neg(\boldsymbol{P\to R})$は恒偽である.

$\boldsymbol{P\to R}$ は，$\boldsymbol{P\to Q}$ と $\boldsymbol{Q\to R}$ からの論理的帰結である.

※ 恒偽の証明に, 同値変形や, 意味の木を用いた. 真理値表を書いても良い.

問 10

「$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$」がトートロジーであることを推論図を用いて証明する.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \quad \overset{2}{A\to B}}{B} \qquad \overset{3}{B\to C}}{C}}{A\to C}\ \to \text{導入 } 1}{(B\to C)\to(A\to C)}\ \to \text{導入 } 3}{(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))}\ \to \text{導入 } 2$$

真理値表を用いて証明する.

| $A$ | $B$ | $C$ | $(A\to B)$ | $(B\to C)$ | $(A\to C)$ | $(B\to C)\to(A\to C)$ | $(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **F** | **F** | **F** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **F** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **F** | **T** | **F** | **T** | **T** | **T** |
| **F** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **F** | **F** | **F** | **T** | **F** | **F** | **T** |
| **T** | **F** | **T** | **F** | **T** | **T** | **T** | **T** |
| **T** | **T** | **F** | **T** | **F** | **F** | **T** | **T** |
| **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** | **T** |

意味の木を用いて証明する.

$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$

$A$

$(\mathrm{T}\to B)\to((B\to C)\to(\mathrm{T}\to C))$

$\Leftrightarrow B\to((B\to C)\to C)$

$B$

$\mathrm{T}\to((\mathrm{T}\to C)\to C)$

$\Leftrightarrow(\mathrm{T}\to C)\to C$

$\Leftrightarrow C\to C$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$

$\neg B$

$\mathrm{F}\to((\mathrm{F}\to C)\to C)$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$

$\neg A$

$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$

$\Leftrightarrow (\mathrm{F}\to B)\to((B\to C)\to(\mathrm{F}\to C))$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}\to((B\to C)\to \mathrm{T})$

$\Leftrightarrow (B\to C)\to \mathrm{T}$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$

同値変形で証明する.

$(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg A\vee B)\vee(\neg(\neg B\vee C)\vee(\neg A\vee C))$

$\Leftrightarrow(A\wedge\neg B)\vee((B\wedge\neg C)\vee(\neg A\vee C))$

$\Leftrightarrow((A\wedge\neg B)\vee\neg A)\vee((B\wedge\neg C)\vee C)$

$\Leftrightarrow((A\vee\neg A)\wedge(\neg B\vee\neg A))\vee((B\vee C)\wedge(\neg C\vee C))$

$\Leftrightarrow(\mathrm{T}\wedge(\neg B\vee\neg A)\vee((B\vee C)\wedge \mathrm{T})$

$\Leftrightarrow(\neg B\vee\neg A)\vee(B\vee C)$

$\Leftrightarrow(\neg B\vee B)\vee\neg A\vee C$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}\vee\neg A\vee C$

$\Leftrightarrow \mathrm{T}$