

離散数学・「試練の塔」の解答 (2012.5/9)

命題を以下のとおり定義する:

L = “左の扉が正しい”, C = “真ん中の扉が正しい”, R = “右の扉が正しい”

B = “男が正直”, O = “老人が正直”, G = “女が正直”

一人だけ正直なので次の論理式が真である:

$$(B \wedge \neg O \wedge \neg G) \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \vee (\neg B \wedge \neg O \wedge G) \quad \dots(1)$$

1つの扉だけ正しいので次の論理式が真である:

$$(L \wedge \neg C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \quad \dots(2)$$

男, 老人, 女の各証言により次の論理式が真である:

$$(B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \wedge (G \leftrightarrow B) \quad \dots(3)$$

(1), (2), (3)の事実から推論する:

$$\begin{aligned} & \{ (B \wedge \neg O \wedge \neg G) \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \vee (\neg B \wedge \neg O \wedge G) \} \\ \wedge & \{ (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \} \\ \wedge & (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \wedge (G \leftrightarrow B) \\ \Leftrightarrow & \{ (B \wedge \neg O \wedge \neg G) \wedge (G \leftrightarrow B) \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (G \leftrightarrow B) \\ & \vee (\neg B \wedge \neg O \wedge G) \wedge (G \leftrightarrow B) \} \\ \wedge & \{ (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \} \wedge (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \\ \Leftrightarrow & \{ (B \wedge \neg O \wedge \neg G) \wedge (G \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow G) \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (G \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow G) \\ & \vee (\neg B \wedge \neg O \wedge G) \wedge (G \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow G) \} \\ \wedge & \{ (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \} \wedge (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \\ \Leftrightarrow & \{ (B \wedge \neg O \wedge \neg G) \wedge (G \rightarrow B) \wedge \mathbf{G} \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge \neg G \wedge \neg B \\ & \vee (\neg B \wedge \neg O \wedge \mathbf{G}) \wedge \neg \mathbf{G} \wedge (B \rightarrow G) \} \\ \wedge & \{ (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \} \wedge (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \\ \Leftrightarrow & (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge \{ (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \vee (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \} \wedge (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \\ \Leftrightarrow & (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \wedge (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \wedge (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \wedge (B \leftrightarrow \neg L) \wedge (B \leftrightarrow R) \wedge (O \leftrightarrow \neg C) \\ \Leftrightarrow & (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \wedge (B \rightarrow \neg L) \wedge (\neg L \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow B) \wedge (O \rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \rightarrow O) \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \wedge (B \rightarrow \neg L) \wedge (\neg L \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow B) \wedge (O \rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \rightarrow O) \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \wedge (B \rightarrow \neg L) \wedge (\neg L \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow B) \wedge (O \rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \rightarrow O) \\ \Leftrightarrow & (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \wedge \neg B \wedge L \wedge \neg B \wedge \neg R \wedge \neg C \wedge O \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \wedge \neg L \wedge \mathbf{B} \wedge \neg \mathbf{B} \wedge \neg R \wedge \neg C \wedge O \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \wedge \neg \mathbf{B} \wedge L \wedge R \wedge \mathbf{B} \wedge \neg C \wedge O \\ \Leftrightarrow & (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge C \wedge \neg R) \wedge \mathbf{F} \\ & \vee (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (\neg L \wedge \neg C \wedge R) \wedge \mathbf{F} \\ \Leftrightarrow & (\neg B \wedge O \wedge \neg G) \wedge (L \wedge \neg C \wedge \neg R) \quad \dots\dots\dots \text{ゆえに, 正直者は老人, 正しい扉は, 左の扉.} \end{aligned}$$