

1 述語論理式の真偽を答えよう。ただし、 $G(x, y) = “x は y より大きい”$, $A(x, y, z) = “x + y = z”$ とする。また、変数はすべて実数とする。

- | | | | |
|--|---|---|---|
| (1) $\forall x \forall y G(x, y)$ | 偽 | (2) $\forall x \exists y G(x, y)$ | 真 |
| (3) $\exists x \forall y G(x, y)$ | 偽 | (4) $\forall y \exists x G(x, y)$ | 真 |
| (5) $\forall x \forall y \exists z A(x, y, z)$ | 真 | (6) $\exists z \forall x \forall y A(x, y, z)$ | 偽 |
| (7) $\exists z \forall x \exists y A(x, y, z)$ | 真 | (8) $\forall x \forall y \forall z \{A(x, y, z) \wedge G(y, 0) \rightarrow G(z, x)\}$ | 真 |

2 次の述語論理式において、変数が自由変数か束縛変数かを答えよう。

- | | |
|---|---|
| (1) $\forall x P(x, y) \rightarrow Q(x, z)$ | (2) $\exists x \{P(x, y) \wedge \exists y Q(x, y, z) \rightarrow \exists z R(y, z)\}$ |
| $P(x, y)$ の x は 束縛変数 | $P(x, y)$ の x は 束縛変数 |
| $P(x, y)$ の y は 自由変数 | $P(x, y)$ の y は 自由変数 |
| $Q(x, y)$ の x は 自由変数 | $Q(x, y, z)$ の x は 束縛変数 |
| $Q(x, z)$ の z は 自由変数 | $Q(x, y, z)$ の y は 束縛変数 |
| | $Q(x, y, z)$ の z は 自由変数 |
| | $R(y, z)$ の y は 自由変数 |
| | $R(y, z)$ の z は 束縛変数 |

3 次の述語論式において、①の式と②の式が同値であるか否かを答えよう（同値変形により確認）。

- | | |
|--|--|
| (1) ① ... $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ | (2) ① ... $\forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \forall z Q(x, z)$ |
| ② ... $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ | ② ... $\forall x \forall y P(x, y) \vee \forall s \forall t Q(s, t)$ |

同値である

同値である

- (3) ① ... $\neg \forall x (\neg \exists y P(x, y))$
 ② ... $\exists x \exists y P(x, y)$

- (4) ① ... $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
 ② ... $\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$

$$\neg \forall x (\neg \exists y P(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \neg (\neg \exists y P(x, y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y P(x, y)$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$\neg \exists x P(x) \vee \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \vee \forall x Q(x)$$

同値でない

同値である

- (5) ① ... $(\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow \exists z R(z)$
 ② ... $\forall x \forall y \forall z \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(z)\}$

- (6) ① ... $\neg \{\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)\}$
 ② ... $\forall x \{P(x) \wedge \neg Q(x)\}$

$$(\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \rightarrow \exists z R(z)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \vee \exists z R(z)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \vee \exists y \neg Q(y) \vee \exists z R(z)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y \exists z \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee R(z)\}$$

$$\neg \{\forall x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)\}$$

$$\Leftrightarrow \neg \{\neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(y)\}$$

$$\Leftrightarrow \{\forall x P(x) \wedge \neg \exists y Q(y)\}$$

$$\Leftrightarrow \{\forall x P(x) \wedge \forall y \neg Q(y)\}$$

$$\Leftrightarrow \{\forall x P(x) \wedge \forall x \neg Q(x)\}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \{P(x) \wedge \neg Q(x)\}$$

同値ではない

同値である