

3 モデル論理

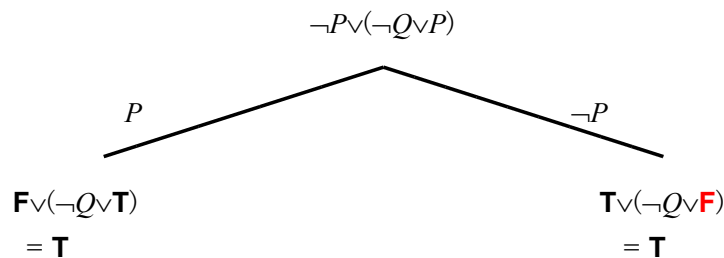
論理式の真偽を、その式に含まれる基本論理式の真偽から求める方法をモデル論理という。たとえば、真理値表を作成することによって、論理式の性質(恒真, 恒偽など)を調べることは、モデル論理の方法である。

3.1 決定問題

決定問題とは、与えられた論理式が、充足不可能, 充足可能, もしくは, 恒真ということを決める問題である。命題論理式の場合, その式を構成する基本論理式のそれぞれに対し, 真偽の組み合わせを全ての通り代入して, 与式の真偽を求めた真理値表を作成することで解決できる。しかし, 真理値表は, 構成する基本論理式の数 n に対して, 2^n 行を必要とするので, 複雑な論理式について作成の手間が大きい。そこで, **意味の木**を用いる方法がある。

意味の木は, 木構造である。ルートノードは, 決定問題で扱う論理式である。ノードからは2つの枝が生まれる。枝には, 論理式に含まれる基本論理式を対応させる。すなわち, 2つの枝は, それぞれこの基本論理式が真の場合と偽の場合である。枝の先には, ノードの表す論理式に, この基本論理式の真偽を代入した結果の論理式を対応させる。論理式より, 真偽が明確になると, そのノードは葉であり, 真偽がまだ明確でない場合は, そのノードはさらに枝分かれをする。こうして, 全てのノードが葉となれば, 扱う論理式の性質がわかる。すなわち, 全ての葉が真ならば恒真, 全ての葉が偽ならば恒偽である。

例1. $\neg P \vee (\neg Q \vee P)$ の意味の木を作成しよう。



※赤字のところは, 配布したプリントでは間違っていたので, 訂正しました。

意味の木を作る手順は次のとおりである。

(手順1) 与えられた論理式を, 連言標準形に直す。

$$F = F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n$$

(手順2) 恒偽であることを調べることを目的とする。

ポイント1) F_i ($i=1\dots n$)のうち少なくとも1つが偽であるならば, F は偽である。

ポイント2) F_i を構成する論理式に, 真があればその F_i を意味の木から外し, また, 偽があれば残りの論理式で構成した F_i' に置き換える。

2つのポイントに関して, 基本論理式に, **T/F** を与えて意味の木を作る。

