ー離散数学･補足資料 ③ー

2010.5/27 徳久雅人

2 形式的な論理

2.1 演繹

演繹とは，ある一般的な規則に従って，いくつかの**前提**から個々の**結論**を導くことである．演繹的推論ということもある．

たとえば，命題として $P \to Q$ は，P という仮定から Q という結論が導かれることを表している．したがって，$P \to Q$ および P が前提となるならば，Q という結論が推論されても尤もである．こうしたことを図示すると以下のようになる．

$$\frac{P \to Q \qquad P}{Q}$$

横線の上には前提を書き，横線の下には結論を書く．この図を**推論図**という．

2.1.1 Modus ponens

前提が P および $P \to Q$ であるときに Q が導かれるという推論規則を **modus ponens** という．これは日本語では構成的仮言的三段論法(constructive hypothetical syllogism)という．

たとえば，

P = 太郎は暇である．

$P \to Q$ = 太郎は，暇ならば釣りをする．

というとき，

Q = 太郎は釣りをする

という推論をすることを modus ponens による推論であり，演繹である．

例 1

3つの前提「A, $A \to B$, $A \to (B \to C)$」挙げるので，結論を導こう．

$$\frac{\dfrac{A \qquad A \to B}{B} \qquad \dfrac{A \qquad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}$$

ゆえに，結論は C である．

（終）

(a) 仮定

例 1 の演繹は，『前提として「$A \to B$, $A \to (B \to C)$」があるとする．ここで，「A」を**仮定**すると「C」を導くことができた』と見なすことができる．つまり，『$A \to B$, $A \to (B \to C)$が言えるとき，$A \to C$ である』ということと同じことである．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \qquad A \to B}{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{A} \qquad A \to (B \to C)}{B \to C}}{C}}{A \to C}\,1$$

このことは，上記の推論図で表すことができる．仮定を前提と同じように使う場合には，数字を頭に付与している．仮定したことが結論に組み込んだ際は，横線の右にその数字を付与している．

例 2

1つの前提「 $A \to B$ 」が言えるとき「$(A\to(B\to C))\to(A\to C)$」という結論を導こう．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad A\to B}{B}\qquad\qquad\dfrac{\overset{1}{A}\qquad \overset{2}{A\to(B\to C)}}{B\to C}}{C}}{A\to C}\,1}{(A\to(B\to C))\to(A\to C)}\,2$$

（終）

（b）証明（前提の無い演繹）

例 2 の演繹で，さらに「 A→B 」という前提が無かったとしよう．それは仮定したとしよう．すると，この演繹を次のように書くことができる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad \overset{3}{A\to B}}{B}\qquad\qquad\dfrac{\overset{1}{A}\qquad \overset{2}{A\to(B\to C)}}{B\to C}}{C}}{A\to C}\,1}{(A\to(B\to C))\to(A\to C)}\,2}{(A\to B)\to[(A\to(B\to C))\to(A\to C)]}\,3$$

これは前提なしに演繹をした結果である．演繹の途中で仮定したことは全て結論に組み込まれている．演繹により成立することが示されたといえる．これは**証明**である．こうして，真理値表を作成しなくても，前提なしに演繹することで論理式を証明することができる．

2.2 命題論理における形式的な操作

以上のおさらいである．「仮定を置くこと」，「 modus ponens により推論すること」，「仮定を結論に組み込むこと」を形式的な操作と考えよう．下記の P, Q, R は論理式である．

- 「仮定を置くこと」

$$\dfrac{\overset{n}{P}\qquad\cdots}{\cdots\cdots}$$

- 「 **→ 除去**」: modus ponens により推論すること．

$$\dfrac{P\qquad P\to Q}{Q}\to\text{除去}$$

- 「 **→ 導入**」: 置かれた仮説を結論に組み込むこと．

$$\dfrac{R}{P\to R}\to\text{導入}\ n$$

※ ここで，P は仮定 1 として図の上部で用いられていること．

練習

$A\to((A\to B)\to B)$ の証明図を書け．

2.2.1 ∧ について

形式的な操作は次のとおりである.

- 「**∧ 導入**」

$$\frac{P \qquad Q}{P \wedge Q}\wedge\text{導入}$$

- 「**∧ 除去**」

$$\frac{P \wedge Q}{P}\wedge\text{除去} \qquad\qquad \frac{P \wedge Q}{Q}\wedge\text{除去}$$

例 3

(1) $((A\wedge B)\to C)\to(A\to(B\to C))$ を証明せよ.　　(2) $(A\to(B\to C))\to((A\wedge B)\to C)$ を証明せよ.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{A} \qquad \overset{2}{B}}{A \wedge B}\wedge\text{導入} \qquad \overset{3}{(A \wedge B)\to C}}{C}\to\text{除去}}{B\to C}\to\text{導入 2}}{A\to(B\to C)}\to\text{導入 1}}{((A \wedge B)\to C)\to(A\to(B\to C))}\to\text{導入 3}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{A \wedge B}}{B}\wedge\text{除去} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{1}{A \wedge B}}{A}\wedge\text{除去} \qquad \overset{2}{A\to(B\to C)}}{B\to C}\to\text{除去}}{C}\to\text{除去}}{(A \wedge B)\to C}\to\text{導入 1}}{(A\to(B\to C))\to((A \wedge B)\to C)}\to\text{導入 2}$$

2.2.2 ∨ について

- 「**∨ 導入**」

$$\frac{P}{P \vee Q}\vee\text{導入} \qquad\qquad \frac{Q}{P \vee Q}\vee\text{導入}$$

- 「**∨ 除去**」

P を仮定　Q を仮定…仮定番号は n

$$\frac{P \vee Q \qquad R \qquad\quad R}{R}\vee\text{除去 } n$$

P を仮定した上で R があり, かつ, Q を仮定した上で R があるとき, $P \vee Q$ があるならば ∨ 除去ができて, R を導くことになる.

例 4

$((A\to C) \wedge (B\to D))\to((A\vee B)\to(C\vee D))$ を証明せよ.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{3}{A\vee B} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{2}{A} \qquad \cfrac{\overset{1}{(A\to C) \wedge (B\to D)}}{A\to C}\wedge\text{除去}}{C}\to\text{除去}}{C\vee D}\vee\text{導入} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{2}{B} \qquad \cfrac{\overset{1}{(A\to C) \wedge (B\to D)}}{B\to D}\wedge\text{除去}}{D}\to\text{除去}}{C\vee D}\vee\text{導入}}{C\vee D}\vee\text{除去 2}}{(A\vee B)\to(C\vee D)}\to\text{導入 3}}{((A\to C) \wedge (B\to D))\to((A\vee B)\to(C\vee D))}\to\text{導入 1}$$

2.2.3 ¬ について

- 「**¬ 導入**」

P を仮定…仮定番号は n

$$\dfrac{\mathbf{F}}{\neg P}\ \neg\ \text{導入}\ n$$

※ P という仮定のために偽が導かれれば， P は否定されるべきであった．また，仮定を結論に組み込んだことになる．

- 「**¬ 除去**」

$$\dfrac{P \qquad \neg P}{\mathbf{F}}\ \neg\ \text{除去}$$

例 5

$(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ を証明せよ．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A} \qquad \overset{2}{A\to B}}{B}\ \to\text{除去} \qquad \overset{3}{\neg B}}{\mathbf{F}}\ \neg\ \text{除去}}{\neg A}\ \neg\ \text{導入}\ 1}{\neg B\to\neg A}\ \to\text{導入}\ 3}{(A\to B)\to(\neg B\to\neg A)}\ \to\text{導入}\ 2$$

2.3 述語論理における形式的な操作

全称作用素および存在作用素についても，導入と除去がある．しかし，本授業においては，説明を省略する．詳細は参考文献[1]を参照せよ．

参考文献

[1] 前原昭二: 記号論理入門, 日本評論社, 1967.