－離散数学・補足資料 ②－

2010.5/20 徳久雅人

1 記号論理の導入

基本的なことをもう少し説明しておく.

1.6 論理式と真偽の決まり方

論理式の真偽の決まり方は，次の3通りがある.

(1) 必ず真になる.

(2) 必ず偽になる.

(3) 解釈によっては真になり，偽になる.

たとえば，$P \vee \neg P$ は，必ず真になり，$P \wedge \neg P$ は必ず偽になる．$P \rightarrow Q$ は，P と Q がそれぞれ真になるか偽になるかに依存している. ここで，必ず真になることを**恒真**といい，必ず真になる論理式のことを**恒真論理式**，あるいは，**恒真式**という. 恒真式を否定した論理式は，必ず偽になる. 必ず偽になることを**恒偽**といい，恒偽となる論理式を**恒偽式**という.

呼び方は，他にもある. 恒真式のことを**妥当式**という. 恒偽式のことを**充足不能式**，あるいは，**矛盾式**という. 恒偽式に該当しない論理式は，**充足可能式**という. 充足可能式は，恒偽式の否定の論理式（恒真式）だけではなく，解釈によっては真になったり偽になったりする論理式が含まれる.

恒真式は**トートロジー**ともいう. トートロジーとして示される論理式を用いることで，後述の標準形への変形を行うことができる.

1.7 標準形

1.7.1 命題論理式の標準形

ある1つの論理式は，別の書き方で幾通りも書くことができる. したがって，標準的な形式に統一して記載するほうが都合が良い. 標準形には次の2つがある.

- **連言標準形(conjunctive normal form)**

  連言標準形の論理式 C は次の構造をしている．P_{ij} は基本論理式（命題結合記号を含まない論理式）である.

  $C = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \ (n \geq 1)$

  $C_i = P_{i1} \vee P_{i2} \vee \ldots \vee P_{im}$

- **選言標準形(disjunctive normal form)**

  選言標準形の論理式 D は次の構造をしている.

  $D = D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_\mathrm{n} \ (n \geq 1)$

  $D_\mathrm{i} = P_{i1} \wedge P_{i2} \wedge \ldots \wedge P_{im}$

連言標準形もしくは選言標準形に変形する手順は，次のとおりである.

(1) 含意「 $\rightarrow$ 」や同値「 $\leftrightarrow$ 」の記号を除去する.
(2) 否定「 $\neg$ 」の記号が基本論理式の直前に来るように，ド・モルガンの法則などを用いて，変形する.
(3) 分配律に基づき，目的とする標準形に近づける.

例 1

(1) $(P \to Q) \to (Q \to R)$ を連言標準形に変換せよ.

［答］$(P \to Q) \to (Q \to R) = \neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg Q \vee R)$ ｛→の除去｝

$= (P \wedge \neg Q) \vee \neg Q \vee R$ ｛ド・モルガンの法則｝

$= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee \neg Q) \vee R$ ｛∨Q の分配｝

$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ ｛∨R の分配｝

(2) $P \to (Q \to P)$ を選言標準形に変換せよ.

［答］$P \to (Q \to P) = \neg P \vee (\neg Q \vee P)$

$= \neg P \vee P \vee \neg Q$

$= \mathbf{T} \vee \neg Q$

$= \mathbf{T}$ （標準形を作ろうとした結果 **T** や **F** になることがある. ）

（終）

1.7.2 述語論理式の標準形

(a) 冠頭標準形

述語論理式の標準形では, 限定作用素の並びにより, 次の2つの形式がある.

- 全称閉形（universal closure）... $\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n\ P$
- 存在閉形（universal closure）... $\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n\ P$

※ P は命題関数である.

さらに, 述語論理式では, たとえば, $P(x) \to \exists y P(y)$ のように, 限定作用素が式の途中に存在することがある. 途中に限定作用素が存在しないように変形したものは次の2つの形式がある.

- 冠頭連言標準形

  $Qx_1 Qx_2 ... Qx_n\ C$ （ここで, C は連言標準形）

- 冠頭選言標準形

  $Qx_1 Qx_2 ... Qx_n\ D$ （ここで, D は選言標準形）

ここで, Q は全称記号∀または存在記号∃である. 混ざっていても構わない.

冠頭標準形に変形する手順は, 次のとおりである.

(1) 係先のない限定作用素は削除する（例．$\forall x(P(y)\to Q(z))$ は $P(y)\to Q(z)$ とする．x 除去）．
(2) 変数名が異なるように付け替える（例．$\forall x\mathrm{P}(x,y)\to\exists y\mathrm{P}(y,z)$ のとき，2 つめの y は紛らわしいので別の名前に付け替えて，$\forall x\mathrm{P}(x,y)\to\exists u\mathrm{P}(u,z)$ とする）．
(3)「$\to$ の除去」，「$\leftrightarrow$ の除去」を行う．
(4)「$\neg$」を限定作用素より内側（右側）に移す．次の同値な式が役に立つ．

$$\neg\forall xP = \exists x(\neg P)$$
$$\neg\exists xP = \forall x(\neg P)$$

(5) 限定作用素を左に移す．次の同値な式が役に立つ．ただし，Q は変数 x を持たないものとする．

$$\forall xP(x) \wedge Q = \forall x(P(x) \wedge Q)$$
$$\forall xP(x) \vee Q = \forall x(P(x) \vee Q)$$
$$\exists xP(x) \wedge Q = \exists x(P(x) \wedge Q)$$
$$\exists xP(x) \vee Q = \exists x(P(x) \vee Q)$$
$$\forall xP(x) \wedge \forall xR(x) = \forall x(P(x) \wedge R(x))$$
$$\exists xP(x) \vee \exists xR(x) = \exists x(P(x) \vee R(x))$$

(6) 以降は，連言標準形・選言標準形の変形手順と同じ．

例 2

次の論理式を冠頭連言標準形に変形せよ．

$$\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\exists uQ(x,u)\to\exists vQ(y,v)))$$
$$= \forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\neg\exists uQ(x,u)\vee\exists vQ(y,v))) \quad [\ \to\text{の除去}]$$
$$= \forall x\forall y(\exists zP(x,y,z)\wedge(\forall u\neg Q(x,u)\vee\exists vQ(y,v))) \quad [\ \neg\ \text{を内側へ移す}]$$
$$= \forall x\forall y\exists z\forall u\exists v(P(x,y,z)\wedge(\neg Q(x,u)\vee Q(y,v))) \quad [\text{限定作用素を外側へ移す}]$$

（終）

(b) Skolem 標準形

Skolem 標準形は，存在記号の除去された冠頭連言標準形である．

Skolem 標準形の説明の前に，全称記号と存在記号の関係を思いだそう．

$$\forall x\exists yP(x,y)$$

上記の論理式では，「どんな x が設定されても，適切に y を設定することで，$P(x,y)$が成立する」ということを表している．つまり，y は，x に依存して設定する必要がある．その設定の仕方を表すものは，関数であるので，

$$y = f(x)$$

と表すことができる．この関数は，元の論理式に代入することができるので，次のように論理式を書き換えることができる．

$$\forall xP(x,f(x))$$

こうして作られたこの論理式は，Skolem 標準形をしており，関数 f は **Skolem 関数**と呼ばれる．

次の論理式についてはどうだろうか．

$$\forall x\forall y\exists zP(x,y,z)$$

この場合，z は，x と y に依存して設定する必要があるので，Skolem 関数は，$z = f(x,y)$ となる. したがって, この論理式の Skolem 標準形は次のようになる.

$$\forall x \forall y P(x,y,f(x,y))$$

一方, 全称記号の影響を受けない変数に, 存在記号が付随することがある.

$$\exists x P(x)$$

この場合, 定数 a（代入可能なものは複数あるが, ここでは定数と呼ぶことにする）を用いて, この論理式の Skolem 標準形を次のように表す.

$$P(a)$$

Skolem 標準形に変換する手順は次のとおりである.

(1) 変数名が異なるように付け替える.
(2)「 $\rightarrow$ の除去」,「 $\leftrightarrow$ の除去」を行う.
(3)「 $\neg$ 」を限定作用素より内側（右側）に移す.
(4) Skolem 関数を導入し, 必要に応じて定数化を行って, 存在記号を除去する.
(5) 全称記号を左に移す.
(6) 連言標準形に変換する.

例 3

Skolem 標準形に変形せよ.

(1) $\forall x \exists y \{P(x,y) \rightarrow Q(f(y))\}$

$= \forall x \exists y \{\neg P(x,y) \vee Q(f(y))\}$

$= \forall x \{\neg P(x,g(x)) \vee Q(f(g(x)))\}$

(2) $\forall x \{\exists y P(y) \rightarrow Q(x)\}$

$= \forall x \{\neg \exists y P(y) \vee Q(x)\}$

$= \forall x \{\forall y \neg P(y) \vee Q(x)\}$

$= \forall x \forall y \{\neg P(y) \vee Q(x)\}$

（終）