連続フーリエ変換および離散フーリエ変換

鳥取大学大学院工学研究科
博士後期課程情報生産工学専攻1年
電気電子工学科 情報通信研究室
川村　新

はじめに

フーリエ変換とは？

ある特定の関係を全く別の視点から調べることができる

時間

周波数

ある関数とそのフーリエ変換を同時に観察する

問題解決への鍵

フーリエ積分

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

h(*t*)　:時間*t*の関数

H(*f*)　:周波数*f*の関数

パラメータ *f* のあらゆる値に対して存在するとき，この変換をフーリエ変換（Fourier Transform）とよぶ.

一般にフーリエ変換は複素数となる.

$$H(f) = R(f) + jI(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)}$$

***R*(*f*)** : 実数部

***I*(*f*)** : 虚数部

|*H*(*f*)| : 振幅

***θ*(*f*)** : 位相角

フーリエ逆変換

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df$$

フーリエ逆変換：本式により，フーリエ変換*H*(*f*)から

もとの信号*h*(*t*)をもとめることができる

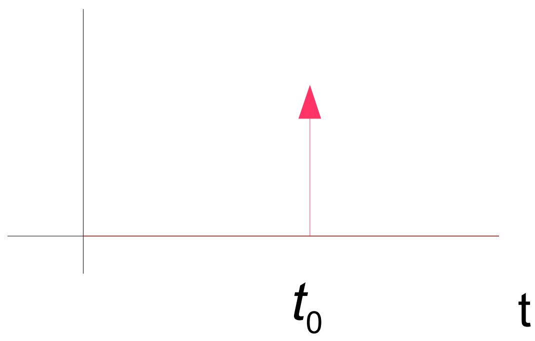
関数*h*(*t*)と*H*(*f*)がフーリエ変換とフーリエ逆変換の関係にあるとき，
この2つの関数をフーリエ変換対とよぶ

フーリエ変換対： ***h*(*t*) ⇔ *H*(*f*)**

インパルス関数

インパルス関数の定義：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\, x(t)\, dt = x(t_0)$$

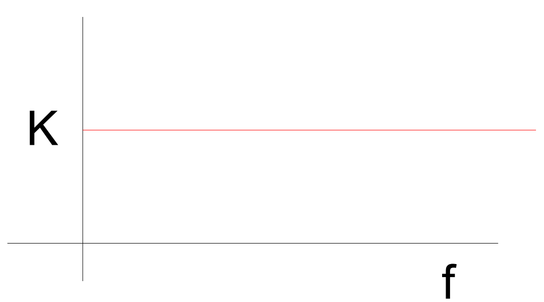


$x(t)$：$t=t_0$で連続な任意の関数

インパルス関数 $h(t) = K\delta(t)$ のフーリエ変換：

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = Ke^{0} = K$$

インパルス関数のフーリエ変換対：　$h(t)=K\delta(n) \Leftrightarrow H(f)=K$



フーリエ逆変換公式の証明

フーリエ変換:

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

代入

フーリエ逆変換:

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft}df\int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j2\pi fx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-x)}df$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta(t-x)dx$$

$$=h(t)$$

H(*f*)=1の逆変換がインパルスなので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft}df=\delta(t)$$

インパルスの定義から

フーリエ変換の諸性質（線形性）

x(*t*)と*y*(*t*)のフーリエ変換を*X*(*f*)と*Y*(*f*)とし，*A*, *B*を定数とすると，

Ax(*t*)＋*By*(*t*)のフーリエ変換は，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[Ax(t)+By(t)\right]e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$=A\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt+B\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$=AX(f)+BY(f)$$

であるから，次の関係が成立し，線形性を満たす

$Ax(t)+By(t) \Leftrightarrow AX(f)+BY(f)$

フーリエ変換の諸性質（対称性）

フーリエ逆変換:

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df$$

より,

$$h(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-j2\pi ft}df$$

パラメータ *t* と *f* を変換すれば,

$$h(-f)=\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

したがって,

$$H(t) \Leftrightarrow h(-f)$$

の関係が成立する.

フーリエ変換の諸性質（時間シフト）

$h(t)$ を時間軸上で t_0 だけ動かすと，そのフーリエ変換は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-j2\pi f(s+t_0)}ds$$

$$= e^{-j2\pi ft_0}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-j2\pi fs}ds$$

$$= e^{-j2\pi ft_0}H(f)$$

ここで，$s=t-t_0$の変数変換を行っている．これより次の関係を得る．

$$h(t-t_0) \Leftrightarrow H(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

フーリエ変換の諸性質（周波数シフト）

$H(f)$ を周波数軸に沿って f_0 だけ動かすと，そのフーリエ変換は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(f-f_0)e^{j2\pi ft}df = \int_{-\infty}^{\infty} H(s)e^{j2\pi t(s+f_0)}ds$$

$$= e^{j2\pi tf_0}\int_{-\infty}^{\infty} H(s)e^{j2\pi fs}ds$$

$$= e^{j2\pi tf_0}h(t)$$

ここで，$s=f-f_0$の変数変換を行っている．これより次の関係を得る．

$$h(t)e^{-j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow H(f-f_0)$$

フーリエ変換の諸性質（畳み込み）

畳み込みは，次の畳み込み積分で定義される.

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t)*h(t)$$

両辺のフーリエ変換を考えると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j2\pi ft}dt$$

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\underline{\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt}\right]d\tau$$

ここで，$\sigma= t-\tau$と変数変換すれば，[ ]内の項は，次のようになる

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-j2\pi f(\sigma+\tau)}d\sigma=e^{-j2\pi f\tau}\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)e^{-j2\pi f\sigma}$$

$$=e^{-j2\pi f\tau}H(f)$$

結局畳み込みのフーリエ変換は,

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underline{e^{-j2\pi f\tau} H(f)} d\tau = H(f)X(f)$$

となり,

$$h(t) * x(t) \Leftrightarrow H(f)X(f)$$

の関係が得られる. 同様に, 次の関係も成立する.

$$h(t)x(t) \Leftrightarrow H(f) * X(f)$$

離散フーリエ変換

計算機を使用してフーリエ変換を行いたい

問題点

- 連続信号を計算できない
- 無限のサンプルを計算できない

解決手法

- 連続信号$h(t)$をインパルス列により標本化
- 計算可能なサンプル数で関数を打切る
- 連続周波数関数$H(f)$をインパルス列で標本化

この操作が離散フーリエ変換となる

時間領域における標本化

連続時間信号$h(t)$にインパルス列$\varDelta_0(t)$を乗じて標本化する.

標本化された関数

$$h(t)\varDelta_0(t)=h(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(kT)\delta(t-kT)$$

時間領域における信号の打切り

サンプルを計算機で計算できる個数に打切る.

信号打切り用方形関数:

$$x(t)=1 \qquad -\frac{T}{2}<t<T_0-\frac{T}{2}$$

$$=0 \qquad \text{その他の場合}$$

打切りにより得られる信号

$$h(t)\Delta_0(t)x(t)=\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t-kT)\right]x(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT)$$

周波数領域における標本化

連続周波数$H(f)$にインパルス列を乗じて標本化する.

$$\|$$

時間領域では，打切りにより得られた信号と，インパルス列の時間関数$\Delta_1(t)$との畳み込みを意味する.

$$
\begin{aligned}
&\left[h(t)\Delta_0(t)x(t)\right]*\Delta_1(t)\\
&=\left[\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT)\right]*\left[T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(t-rT_0)\right]\\
&=\cdots+T_0\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t+T_0-kT)\\
&\quad+T_0\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-kT)\\
&\quad+T_0\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t-T_0-kT)+\cdots
\end{aligned}
$$

$\Delta_1(t)$

$$\Delta_1(t)=T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta(t-rT_0)$$

したがって，求める時間領域信号は，次式で与えられる．

$$\tilde{h}(t)=T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1}h(kT)\,\delta(t-kT-rT_0)\right]$$

$\tilde{h}(t)$ ：もとの時間信号*h*(*t*)の近似信号

この信号のフーリエ変換が離散フーリエ変換となる

周波数
標本化!

$$H(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\,\delta(f-nf_0)\qquad f_0=\frac{1}{T_0}$$

離散フーリエ変換

$$H(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\delta(f-nf_0) \qquad f_0=\frac{1}{T_0}$$

ここで，フーリエ級数の理論から，α_nを求める式は…

・周期関数のフーリエ変換はとびとびの値で得られる

$$h_{T_0}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n e^{j2\pi nt/T_0} \qquad \alpha_n=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}h_{T_0}(t)e^{-j2\pi nt/T_0}dt$$

$$\alpha_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T_0-T/2}\tilde{h}(t)e^{-j2\pi nt/T_0}dt \qquad n=0,\pm1,\pm2,..$$

$$\tilde{h}(t)=T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1}h(kT)\delta(t-kT-rT_0)\right]$$

$\downarrow$ 代入

$$\alpha_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T_0-T/2}\tilde{h}(t)e^{-j2\pi nt/T_0}dt$$ $n=0,\pm1,\pm2,..$

$$\alpha_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T_0-T/2}T_0\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1}h(kT)\delta(t-kT-rT_0)\right]e^{-j2\pi nt/T_0}dt$$

$$=\int_{-T/2}^{T_0-T/2}\sum_{k=0}^{N-1}h(kT)\delta(t-kT)e^{-j2\pi nt/T_0}dt$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}h(kT)\int_{-T/2}^{T_0-T/2}e^{-j2\pi nt/T_0}\delta(t-kT)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}h(kT)e^{-j2\pi knT/T_0}$$ $T_0=NT$ より,

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi kn/N} \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

周波数
標本化

これを次式に代入すると,

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - nf_0) \qquad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{NT}$$

$$\downarrow$$

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi kn/N} \delta\left(f - \frac{n}{NT}\right)$$

ここで,

$$\alpha_{r+N} = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi k(r+N)/N} = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi kr/N} e^{-j2\pi k}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)e^{-j2\pi kr/N} = \alpha_r$$

より,

計算される$H(f)$の値で異なるものはN個 のみ

$H(f)$はN個の標本を1周期とする周期関数となる

$$H\left(\frac{n}{NT}\right)=\sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\,e^{-j2\pi nk/N} \qquad n=0,1,\ldots,N-1$$

離散フーリエ変換の式（標本値のみで表示）

離散フーリエ逆変換

離散フーリエ逆変換:

$$h(kT) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H\left(\frac{n}{NT}\right) e^{j2\pi nk/N} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

証） 離散フーリエ変換: $$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{h(kT)} e^{-j2\pi nk/N} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

に上式を代入

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} H\left(\frac{r}{NT}\right) e^{j2\pi rk/N}\right] e^{-j2\pi nk/N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} H\left(\frac{r}{NT}\right)\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi rk/N} e^{-j2\pi nk/N}\right]$$

利用

$$= H\left(\frac{n}{NT}\right) \qquad \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi rk/N} e^{-j2\pi nk/N} = \begin{cases} N & r = n \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

まとめ

- 計算機による計算が可能となる離散フーリエ変換を，
  連続フーリエ変換と関連付けながら導いた．

- 連続フーリエ変換と離散フーリエ変換の違いは離散変換に
  <u>標本化</u>と<u>打切り</u>が必要であるということに由来する．

- 離散フーリエ変換を応用する場合，最も重要なことは，
  離散フーリエ変換が<u>時間領域および周波数領域</u>における
  <u>周期性を前提</u>としているということを十分留意しておくことである．

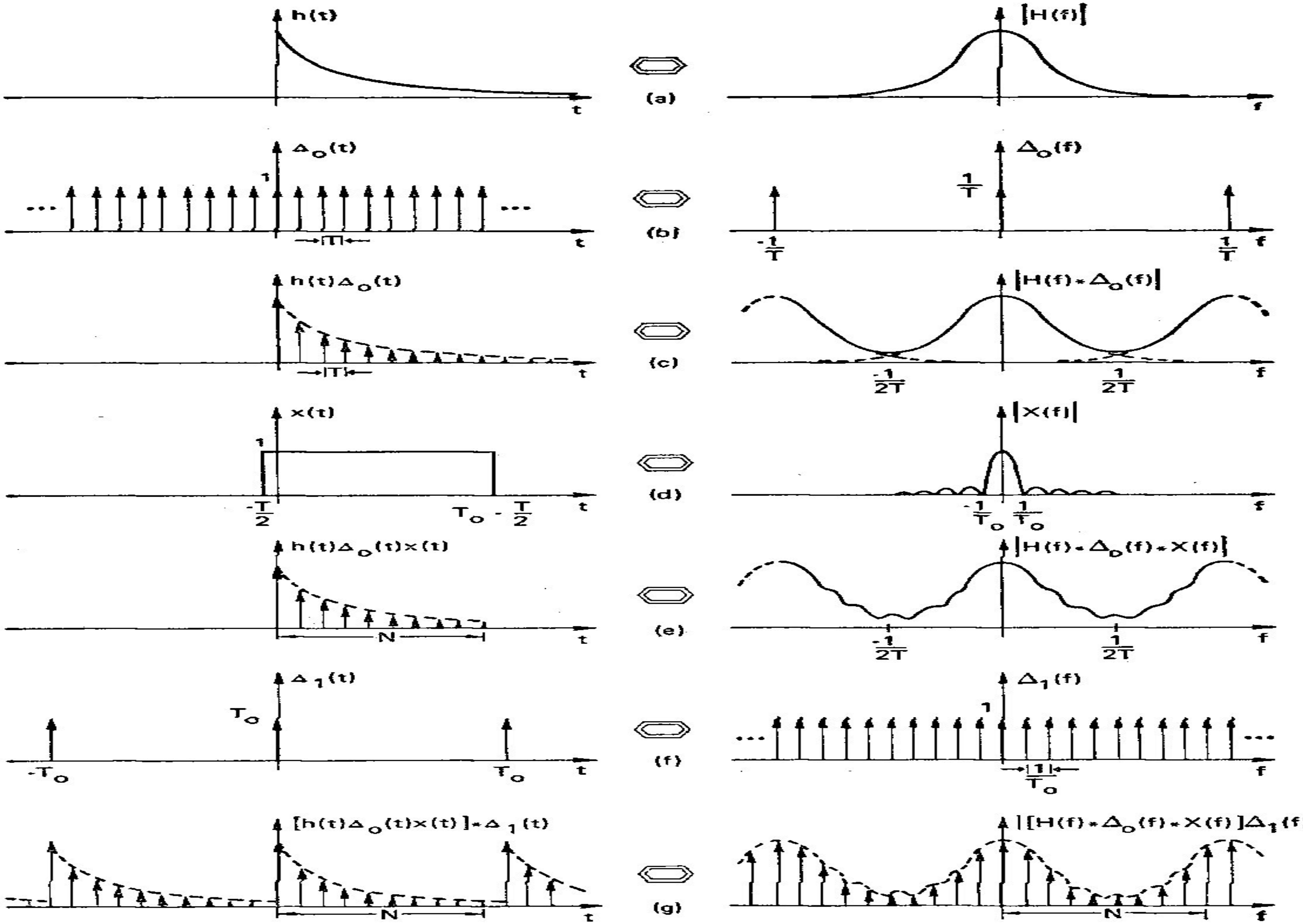


図 6-2　離散フーリエ変換対を求める過程

図1　離散フーリエ変換対を求める過程